

## EXERCICE 4

1. a. La variable aléatoire  $X$  est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

• 3 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;

• chaque expérience a deux issues : « le nombre obtenu est 6 » avec une probabilité  $p = \frac{1}{6}$  ou « le nombre obtenu n'est pas 6 » avec une probabilité  $1 - p = \frac{5}{6}$ .

La variable aléatoire  $X$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 3$  et  $p = \frac{1}{6}$ . On en déduit la loi de probabilité de  $X$

b. On sait que  $E(X) = np = 3 \times \frac{1}{6} = 0,5$ .

$$E(X) = 0,5.$$

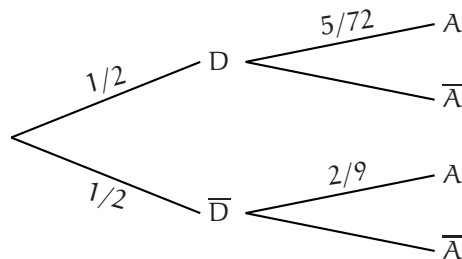
c.  $p(X = 2) = \binom{3}{2} p^2 (1 - p)^1 = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$ .

$$p(X = 2) = \frac{5}{72}.$$

2) a. De même, si on choisit le dé truqué, la probabilité d'obtenir deux 6 en trois lancers est  $\binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ .

Ainsi,  $p_{\overline{D}}(A) = \frac{2}{9}$  et aussi, d'après la question 1.,  $p_D(A) = \frac{5}{72}$ .

Représentons la situation par un arbre.



On a alors  $p(D \cap A) = p(D) \times p_D(A) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{72} = \frac{5}{144}$  et  $p(\overline{D} \cap A) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$ .

$$p(D \cap A) = \frac{5}{144} \text{ et } p(\overline{D} \cap A) = \frac{1}{9}.$$

b. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(A) = p(D \cap A) + p(\overline{D} \cap A) = \frac{5}{144} + \frac{1}{9} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}.$$

$$p(A) = \frac{7}{48}.$$

c. La probabilité demandée est  $p_A(\overline{D})$ . Or

$$p_A(\overline{D}) = \frac{p(A \cap \overline{D})}{p(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{48}} = \frac{1}{9} \times \frac{48}{7} = \frac{16}{3 \times 7} = \frac{16}{21}.$$

La probabilité d'avoir choisi le dé truqué est  $\frac{16}{21}$ .

**3. a.**  $B_n$  est l'événement contraire de l'événement « n'obtenir aucun 6 en  $n$  lancers ».

Si le dé choisi est le dé bien équilibré, la probabilité de n'obtenir aucun 6 en  $n$  lancers est  $\left(\frac{5}{6}\right)^n$  et si le dé choisi est le dé truqué, la probabilité de n'obtenir aucun 6 en  $n$  lancers est  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Donc, comme à la question 2.b., la probabilité de n'obtenir aucun 6 en  $n$  lancers est  $\frac{1}{2} \left( \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$  puis

$$p_n = 1 - \frac{1}{2} \left( \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right).$$

**b.** Puisque  $-1 < \frac{5}{6} < 1$  et  $-1 < \frac{2}{3} < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1.$$

Ceci signifie que si on lance le dé un grand nombre de fois, on est quasiment sûr d'obtenir au moins une fois un 6.