EXERCICE 4 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué, la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable X ?

b. Quelle est son espérance ?

c. Calculer $p(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les événements D et A suivants :

- D : « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- A : « obtenir exactement deux 6 ».

a. Calculer la probabilité des événements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. En déduire que $p(A) = \frac{7}{48}$.

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2). On note B_n l'événement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'événement B_n.

b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

EXERCICE 4

1. a. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
• 3 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
• chaque expérience a deux issues : « le nombre obtenu est 6 » avec une probabilité $p = \dfrac{1}{6}$ ou « le nombre obtenu n'est pas 6 » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{5}{6}$.
La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{6}$. On en déduit la loi de probabilité de X

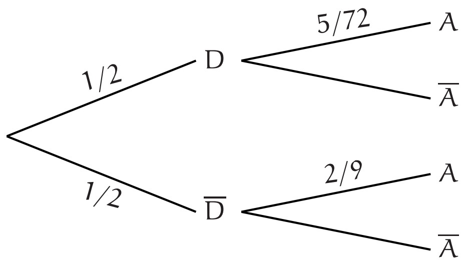
b. On sait que $E(X) = np = 3 \times \dfrac{1}{6} = 0,5$.

$$\boxed{E(X) = 0,5.}$$

c. $p(X = 2) = \dbinom{3}{2} p^2 (1-p)^1 = 3 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{72}$.

$$\boxed{p(X = 2) = \dfrac{5}{72}.}$$

2) a. De même, si on choisit le dé truqué, la probabilité d'obtenir deux 6 en trois lancers est $\dbinom{3}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$.
Ainsi, $p_{\overline{D}}(A) = \dfrac{2}{9}$ et aussi, d'après la question 1., $p_D(A) = \dfrac{5}{72}$.
Représentons la situation par un arbre.



On a alors $p(D \cap A) = p(D) \times p_D(A) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{72} = \dfrac{5}{144}$ et $p(\overline{D} \cap A) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(A) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{9}$.

$$\boxed{p(D \cap A) = \dfrac{5}{144} \text{ et } p(\overline{D} \cap A) = \dfrac{1}{9}.}$$

b. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(A) = p(D \cap A) + p(\overline{D} \cap A) = \frac{5}{144} + \frac{1}{9} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}.$$

$$\boxed{p(A) = \dfrac{7}{48}.}$$

c. La probabilité demandée est $p_A(\overline{D})$. Or

$$p_A(\overline{D}) = \frac{p(A \cap \overline{D})}{p(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{48}} = \frac{1}{9} \times \frac{48}{7} = \frac{16}{3 \times 7} = \frac{16}{21}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'avoir choisi le dé truqué est } \frac{16}{21}.}$$

3. **a.** B_n est l'événement contraire de l'événement « n'obtenir aucun 6 en n lancers ».
Si le dé choisi est le dé bien équilibré, la probabilité de n'obtenir aucun 6 en n lancers est $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ et si le dé choisi est le dé truqué, la probabilité de n'obtenir aucun 6 en n lancers est $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Donc, comme à la question 2.b., la probabilité de n'obtenir aucun 6 en n lancers est $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ puis

$$\boxed{p_n = 1 - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).}$$

b. Puisque $-1 < \frac{5}{6} < 1$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 1.}$$

Ceci signifie que si on lance le dé un grand nombre de fois, on est quasiment sûr d'obtenir au moins une fois un 6.

