

EXERCICE 1 (4 points)

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.

Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

On note :

- D l'événement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'événement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. a) Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.
b) On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.
Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,8942.
4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

Un lecteur MP3 est :

- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.

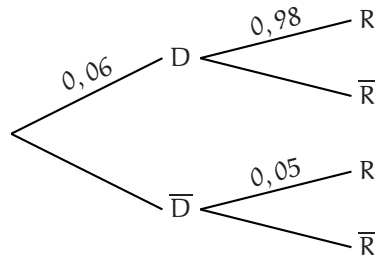
Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

- a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G .
- b) Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G . Donner une interprétation de ce résultat.

EXERCICE 1

1) Représentons la situation par un arbre.



2) a) La probabilité demandée est $p(D \cap \bar{R})$. Or

$$p(D \cap \bar{R}) = p(D) \times p_{D}(\bar{R}) = p(D) \times (1 - p_{D}(R)) = 0,06 \times 0,02 = 0,0012.$$

La probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté est 0,0012.

b) La probabilité demandée est $p(R \cap \bar{D}) + p(\bar{R} \cap D)$. On a déjà $p(\bar{R} \cap D) = 0,0012$. Il manque

$$p(R \cap \bar{D}) = p(\bar{D}) \times p_{\bar{D}}(R) = (1 - p(D)) \times p_{\bar{D}}(R) = 0,94 \times 0,05 = 0,047,$$

et donc $p(R \cap \bar{D}) + p(\bar{R} \cap D) = 0,047 + 0,0012 = 0,0482$.

La probabilité qu'il y ait erreur de contrôle est 0,0482.

3) La probabilité demandée est $p(\bar{R})$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(\bar{R}) = p(\bar{R} \cap D) + p(\bar{R} \cap \bar{D}) = 0,0012 + p(\bar{D}) \times p_{\bar{D}}(\bar{R}) = 0,0012 + 0,94 \times (1 - 0,05) = 0,8942.$$

La probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est 0,8942.

4) a) Notons X le nombre de succès au cours des quatre contrôles. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le lecteur n'est pas rejeté » avec une probabilité $p = 0,8942$ (d'après 3)) ou « le lecteur est rejeté » avec une probabilité $1 - p = 0,1058$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8942$.

La variable aléatoire G prend 3 valeurs : $120 - 50 = 70$ euros, $60 - 50 = 10$ euros et -50 euros.

- $p(G = 70) = p(X = 4) = \binom{4}{4} \times 0,8942^4 \times 0,1058^0 = 0,8942^4 = 0,64$ à 10^{-2} près.
- $p(G = 10) = p(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,8942^3 \times 0,1058^1 = 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058 = 0,30$ à 10^{-2} près.
- $p(G = -50) = 1 - p(G = 70) - p(G = 10) = 1 - 0,8942^4 - 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058 = 0,06$ à 10^{-2} près.

Récapitulons ces résultats dans un tableau.

g_i	70	10	-50
$p(G = g_i)$	0,64	0,30	0,06

b) $E(G) = 70 \times p(G = 70) + 10 \times p(G = 10) - 50 \times p(G = -50)$ et donc

$$\begin{aligned} E(G) &= 70 \times 0,8942^4 + 10 \times 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058 - 50 \times (1 - 0,8942^4 - 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058) \\ &= 44,88 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.} \end{aligned}$$

Ceci signifie que chaque lecteur rapportera en moyenne 44,88 euros.