EXERCICE 3

PARTIE I Restitution organisée de connaissances

Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!}+\frac{(n-1)!}{p!((n-1)-p)!}=\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\times(n-p)\times(n-p-1)!}+\frac{(n-1)!}{p\times(p-1)!\times(n-p-1)!}\\ &= \frac{p\times(n-1)!}{p\times(p-1)!\times(n-p)\times(n-p-1)!}+\frac{(n-p)\times(n-1)!}{p\times(p-1)!\times(n-p)\times(n-p-1)!}\\ &= \frac{p\times(n-1)!}{p!\times(n-p)!}+\frac{(n-p)\times(n-1)!}{p!\times(n-p)!}=\frac{p\times(n-1)!+(n-p)\times(n-1)!}{p!\times(n-p)!}\\ &= \frac{(p+n-p)\times(n-1)!}{p!\times(n-p)!}=\frac{n\times(n-1)!}{p!\times(n-p)!}=\frac{n!}{p!\times(n-p)!}=\binom{n}{p}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous entiers naturels } n \text{ et } p \text{ tels que } 1 \leqslant p \leqslant n,\ \binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}.}$$

PARTIE II

1) a) Les différents tirages de deux jetons sont supposés équiprobables. Le nombre de cas possibles est le nombre de façons de tirer simultanément deux jetons parmi dix jetons. Il y en a

$$\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45.$$

Le nombre de cas favorables est le nombre de façons de tirer simultanément les deux jetons parmi les sept jetons blancs. Il y en a

$$\binom{7}{2}=\frac{7\times 6}{2}=21.$$

On en déduit que

$$p(A)=\frac{21}{45}=\frac{3\times 7}{3\times 15}=\frac{7}{15}.$$

b) Il y a toujours 45 cas possibles. D'autre part, il y a 4 jetons blancs portant un numéro impair (1, 3, 5 et 7) et 2 jetons noirs portant un numéro impair (1 et 3) et donc 6 jetons portant un numéro impair. Le nombre de cas favorables est le nombre de façons de tirer simultanément les deux jetons parmi les six jetons portant un numéro impair. Il y en a

$$\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15.$$

On en déduit que

$$p(B)=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}.$$

c) $p(A)\times p(B)=\frac{7}{15}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{45}$. D'autre part, l'événement $A\cap B$ est l'événement « obtenir deux jetons blancs portant des numéros impairs ». Il y a 4 jetons blancs portant des numéros impairs et donc $\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{2}=6$ tirages de deux jetons blancs portant des numéros impairs. On en déduit que

$$p(A\cap B)=\frac{6}{45}.$$

Comme $p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$, on a montré que

$$\boxed{\text{les événements } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

2) a) X prend trois valeurs : 0, 1 et 2.

- $p(X=0) = \dfrac{\dbinom{7}{0} \times \dbinom{3}{2}}{\dbinom{10}{2}} = \dfrac{1 \times 3}{45} = \dfrac{1}{15}$.
- $p(X=1) = \dfrac{\dbinom{7}{1} \times \dbinom{3}{1}}{\dbinom{10}{2}} = \dfrac{7 \times 3}{45} = \dfrac{7}{15}$.
- $p(X=2) = \dfrac{\dbinom{7}{2} \times \dbinom{3}{0}}{\dbinom{10}{2}} = \dfrac{21}{45} = \dfrac{7}{15}$.

$$\boxed{p(X=0) = \frac{1}{15},\ p(X=1) = \frac{7}{15} \text{ et } p(X=2) = \frac{7}{15}.}$$

b) $E(X) = 0 \times p(X=0) + 1 \times p(X=1) + 2 \times p(X=2) = \dfrac{7}{15} + 2 \times \dfrac{7}{15} = \dfrac{3 \times 7}{15} = \dfrac{7}{5} = 1,4$.

$$\boxed{E(X) = 1,4.}$$

