<u>EXERCICE 3</u> : (5 points)

Commun à tous les candidats

I *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leq p < n$ on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

II Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1) a) On note A l'événement «obtenir deux jetons blancs».
Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.

b) On note B l'événement «obtenir deux jetons portant des numéros impairs».
Calculer la probabilité de B.

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 3

PARTIE I Restitution organisée de connaissances

Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!((n-1)-p)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)! \times (n-p) \times (n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{p \times (p-1)! \times (n-p-1)!} \\
&= \frac{p \times (n-1)!}{p \times (p-1)! \times (n-p) \times (n-p-1)!} + \frac{(n-p) \times (n-1)!}{p \times (p-1)! \times (n-p) \times (n-p-1)!} \\
&= \frac{p \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} + \frac{(n-p) \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} = \frac{p \times (n-1)! + (n-p) \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} \\
&= \frac{(p+n-p) \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} = \binom{n}{p}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous entiers naturels } n \text{ et } p \text{ tels que } 1 \leqslant p \leqslant n,\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.}$$

PARTIE II

1) a) Les différents tirages de deux jetons sont supposés équiprobables. Le nombre de cas possibles est le nombre de façons de tirer simultanément deux jetons parmi dix jetons. Il y en a

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

Le nombre de cas favorables est le nombre de façons de tirer simultanément les deux jetons parmi les sept jetons blancs. Il y en a

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21.$$

On en déduit que

$$p(A) = \frac{21}{45} = \frac{3 \times 7}{3 \times 15} = \frac{7}{15}.$$

b) Il y a toujours 45 cas possibles. D'autre part, il y a 4 jetons blancs portant un numéro impair (1, 3, 5 et 7) et 2 jetons noirs portant un numéro impair (1 et 3) et donc 6 jetons portant un numéro impair. Le nombre de cas favorables est le nombre de façons de tirer simultanément les deux jetons parmi les six jetons portant un numéro impair. Il y en a

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

On en déduit que

$$p(B) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

c) $p(A) \times p(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$. D'autre part, l'événement $A \cap B$ est l'événement « obtenir deux jetons blancs portant des numéros impairs ». Il y a 4 jetons blancs portant des numéros impairs et donc $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ tirages de deux jetons blancs portant des numéros impairs. On en déduit que

$$p(A \cap B) = \frac{6}{45}.$$

Comme $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$, on a montré que

$$\boxed{\text{les événements } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

2) a) X prend trois valeurs : 0, 1 et 2.

- $p(X=0) = \dfrac{\dbinom{7}{0} \times \dbinom{3}{2}}{\dbinom{10}{2}} = \dfrac{1 \times 3}{45} = \dfrac{1}{15}$.
- $p(X=1) = \dfrac{\dbinom{7}{1} \times \dbinom{3}{1}}{\dbinom{10}{2}} = \dfrac{7 \times 3}{45} = \dfrac{7}{15}$.
- $p(X=2) = \dfrac{\dbinom{7}{2} \times \dbinom{3}{0}}{\dbinom{10}{2}} = \dfrac{21}{45} = \dfrac{7}{15}$.

$$\boxed{p(X=0) = \frac{1}{15},\ p(X=1) = \frac{7}{15} \text{ et } p(X=2) = \frac{7}{15}.}$$

b) $E(X) = 0 \times p(X=0) + 1 \times p(X=1) + 2 \times p(X=2) = \dfrac{7}{15} + 2 \times \dfrac{7}{15} = \dfrac{3 \times 7}{15} = \dfrac{7}{5} = 1,4$.

$$\boxed{E(X) = 1,4.}$$

