EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

1. Restitution organisée de connaissances
Prérequis : on rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si, et seulement si, $p\,(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire.

a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$.

b. Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. Application : Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :

- R : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
- S : « son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

Il a observé que, chaque jour de classe, la probabilité de R est égale à $0,1$ et que celle de S est égale à $0,05$. Lorsqu'au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane est en retard au lycée, sinon il est à l'heure.

a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.
Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Centres étrangers

EXERCICE 1

1) Restitution organisée de connaissances

a) Les événements $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ constituent une partition de l'événement B. La formule des probabilités totales fournit alors

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}).$$

b) Supposons maintenant les événements A et B indépendants.

$$\begin{aligned} p(B \cap \overline{A}) &= p(B) - p(B \cap A) \text{ (d'après a))} \\ &= p(B) - p(B) \times p(A) \text{ (car les événements A et B sont indépendants)} \\ &= p(B)(1 - p(A)) = p(B) \times p(\overline{A}). \end{aligned}$$

Ceci montre que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

2) Application.

a) La probabilité demandée est $p(\overline{R} \cap S)$. Puisque les événements R et S sont indépendants, il en est de même des événements $\overline{R}$ et S d'après 1)b). Donc

$$p(\overline{R} \cap S) = p(\overline{R}) \times p(S) = (1 - 0,1) \times 0,05 = 0,045.$$

La probabilité que Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne est $0,045$.

b) Stéphane arrive à l'heure si et seulement si il entend son réveil sonner et son scooter ne tombe pas en panne. La probabilité demandée est donc $p(\overline{R} \cap \overline{S})$. Puisque les événements $\overline{R}$ et S sont indépendants, il en est de même des événements $\overline{R}$ et $\overline{S}$. Donc

$$p(\overline{R} \cap \overline{S}) = p(\overline{R}) \times p(\overline{S}) = 0,9 \times 0,95 = 0,855.$$

La probabilité que Stéphane soit à l'heure un jour de classe donné est $0,855$.

c) Notons X le nombre de fois où Stéphane entend le réveil sonner. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « Stéphane entend le réveil sonner » avec une probabilité $p = p(\overline{R}) = 0,9$ et « Stéphane n'entend pas le réveil sonner » avec une probabilité $1 - p = p(R) = 0,1$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,9$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 4)$ et on a

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 4) &= p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{4} \times 0,9^4 \times 0,1^1 + 0,9^5 = 5 \times 0,9^4 \times 0,1 + 0,9^5 \\ &= 0,9185 \text{ arrondi à la quatrième décimale.} \end{aligned}$$

