EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10% n'ont pas survécu, 75% deviennent rouges et les 15% restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5% n'ont pas survécu, 65% deviennent rouges et les 30% restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60% au premier éleveur, 40% au second.

1. Un enfant achète un poison le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

1.a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est $0,92$.

1.b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

1.c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté.

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

EXERCICE 3

1. a) Notons S l'événement « le poisson a survécu après un mois », P l'événement « le poisson provient du premier élevage » et D l'événement « le poisson provient du deuxième élevage » (de sorte que $D = \overline{P}$). La formule des probabilités totales fournit

$$p(S) = p(S \cap P) + p(S \cap D) = p(P) \times p_P(S) + p(D) \times p_D(S) = 0,6 \times 0,9 + 0,4 \times 0,95 = 0,54 + 0,38 = 0,92.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est } 0,92.}$$

b) Notons R l'événement « après un mois, le poisson est rouge ». La formule des probabilités totales fournit

$$p(R) = p(R \cap P) + p(R \cap D) = p(P) \times p_P(R) + p(D) \times p_D(R) = 0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,65 = 0,45 + 0,26 = 0,71.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que le poisson soit toujours rouge un mois plus tard est } 0,71.}$$

c) Notons G l'événement « après un mois, le poisson est gris ». La probabilité demandée est $p_G(P)$. La formule des probabilités totales montre que $p(S) = p(R) + p(G)$ et donc

$$p_G(P) = \frac{p(G \cap P)}{p(G)} = \frac{p(P) \times p_P(G)}{p(S) - p(R)} = \frac{0,9 \times 0,15}{0,92 - 0,71} = \frac{0,135}{0,21} = \frac{9}{14} = 0,64 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$\boxed{\text{La probabilité que le poisson provienne du premier élevage sachant qu'il est gris est } \frac{9}{14}.}$$

2. Notons Y le nombre d'alevins qui ont survécu au bout d'un mois. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'alevin a survécu au bout d'un mois » avec une probabilité $p = 0,92$ (d'après 1.a)) ou « l'alevin n'a pas survécu au bout d'un mois » avec une probabilité $1 - p = 1 - 0,08$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,92$.

La probabilité demandée est $p(Y = 3)$ et on a

$$p(Y = 3) = \binom{5}{3} \times 0,92^3 \times 0,08^2 = 0,04 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie est } 0,04 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

3. D'après les questions 1.a) et 1.b), la loi de probabilité de X est

x	1	$0,25$	$-0,1$
$p(X = x)$	$0,71$	$0,21$	$0,08$

L'espérance mathématique de X est alors

$$E(X) = 0,71 \times 1 + 0,21 \times 0,25 + 0,08 \times (-0,1) = 0,75 \text{ euro arrondi au centime d'euro.}$$

$$\boxed{E(X) = 0,75 \text{ euro arrondi au centime d'euro.}}$$

