Exercice 1 (4 points)

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ».
   Montrer que $p(R) = 0{,}15$.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la **partie A**, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit x un entier naturel non nul.
Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x-2$ et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.

2. Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.

3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(G) \geq 0$?

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Liban

EXERCICE 1

Partie A

1. Notons A (resp. B) l'événement « le joueur tire une boule dans l'urne A (resp. B) ». La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) = p(A) \times p_A(R) + p(B) \times p_B(R) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0,15.$$

$$\boxed{p(R) = 0,15.}$$

2. Calculons les probabilités des événements A et B sachant que l'événement R est réalisé.

$$p_R(A) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{p(A) \times p_A(R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{15} \times \frac{20}{3} = \frac{4}{9},$$

et

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{p(B) \times p_B(R)}{p(R)} = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{12} \times \frac{20}{3} = \frac{5}{9}.$$

Ainsi, $p_R(B) > p_R(A)$ et donc

$\boxed{\text{si le joueur obtient une boule rouge, il est plus probable que cette boule provienne de l'urne B.}}$

Partie B

1. Notons X le nombre de boules rouges obtenues au cours des deux épreuves. La variable aléatoire G a la même loi de probabilité que la variable X.
Maintenant, la variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 2 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est rouge » avec une probabilité $p = 0,15$ (d'après A.1.) ou « la boule tirée n'est pas rouge » avec une probabilité $1 - p = 0,85$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0,15$. On obtient ainsi

- $p(G = 2x) = p(X = 2) = \binom{2}{2}(0,15)^2(0,85)^0 = 0,0225$,
- $p(G = x - 2) = p(X = 1) = \binom{2}{1}(0,15)^1(0,85)^1 = 0,255$,
- $p(G = -4) = p(X = 0) = \binom{2}{0}(0,15)^0(0,85)^2 = 0,7225$.

On peut résumer ces résultats dans un tableau.

t	$2x$	$x-2$	-4
$p(G=t)$	$0,0225$	$0,255$	$0,7225$

2.

$$\begin{aligned} E(G) &= p(G=2x)\times 2x + p(G=x-2)\times(x-2) + p(G=-4)\times(-4) \\ &= 0,0225(2x) + 0,255(x-2) + 0,7225(-4) = 0,3x - 3,4. \end{aligned}$$

$$\boxed{E(G) = 0,3x - 3,4.}$$

3. $E(G) \geq 0 \Leftrightarrow 0,3x - 3,4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{34}{3} \Leftrightarrow x \geq 12$ (car x est entier).

$\boxed{\text{L'espérance de gain devient positive pour } x \geq 12.}$

