EXERCICE 2 **(5 points)**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points
$A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$ et $C(3, -1, 2)$.

1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.

2) On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite $(\mathcal{D})$, dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

3) Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?

4) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$.

EXERCICE 3 **(5 points)**

Commun à tous les candidats

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.
On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1) ***Restitution organisée de connaissances***

a) Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.

b) Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

2) Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}00026$.

a) Calculer $P(X \leqslant 1000)$ et $P(X > 1000)$.

b) Sachant que l'événement $(X > 1000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X > 2000)$.

c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

EXERCICE 3

1) ***Restitution organisée de connaissances***

a) Soit $t \geq 0$.

$$R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - (-e^{-\lambda t} + e^0) = 1 + e^{-\lambda t} - 1 = e^{-\lambda t}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \geq 0,\ R(t) = e^{-\lambda t}.}$$

b) Soient t et s deux réels positifs.

$$P_{X>t}(X > t+s) = \frac{P((X > t) \cap (X > t+s))}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{R(t+s)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+s-t)} = e^{-\lambda s}.$$

En particulier, $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas de t et donc

$$\boxed{\text{la variable } X \text{ suit une loi de durée de vie sans vieillissement.}}$$

2) a) D'après la question 1)a), $P(X > 1000) = e^{-0,00026\times1000} = e^{-0,26} = 0,77$ à 10^{-2} près puis $P(X \leq 1000) = 1 - P(X > 1000) = 1 - e^{-0,26} = 0,23$ à 10^{-2} près.

$$\boxed{P(X \leq 1000) = 1 - e^{-0,26} \text{ et } P(X > 1000) = e^{-0,26}.}$$

b) La probabilité demandée est $P_{X>1000}(X > 1000+1000)$. D'après la question 1)b), cette probabilité est aussi $P(X > 1000)$ ou encore $e^{-0,26}$.

$$\boxed{P_{X>1000}(X > 2000) = e^{-0,26}.}$$

c) . La probabilité demandée est $P_{X>2000}(X \leq 3000)$. Or

$$P_{X>200}(X \leq 3000) = 1 - P_{X>200}(X > 3000) = 1 - P(X > 1000) = 1 - e^{-0,26}.$$

$$\boxed{P_{X>2000}(X \leq 3000) = 1 - e^{-0,26}.}$$

