EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ tels que :

- le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
- chacun de suivants, $S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

- on tire au hasard une bille dans S_1 ;
- on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;
- on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;
- etc ...

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1) Mise en évidence d'une relation de récurrence

a) D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$ et $p_{\overline{E_1}}(E_2)$. En déduire la valeur de $p(E_2)$.

b) A l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

2) Etude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} \text{ pour tout } n \geqslant 1 \end{cases}.$$

a) Démontrer que la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3) Evolution des probabilités $p(E_n)$

a) A l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.

b) Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on $0{,}499\ 99 \leqslant p(E_n) \leqslant 0,5$?

EXERCICE 2

1) Mise en évidence d'une relation de récurrence

a) L'énoncé fournit $p(E_1) = \dfrac{2}{5}$ et donc $p(\overline{E_1}) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$. Ensuite

• si l'événement E_1 est réalisé, le sac S_2 contient 2 billes jaunes et 3 billes vertes. On a donc $p_{E_1}(E_2) = \dfrac{3}{5}$;

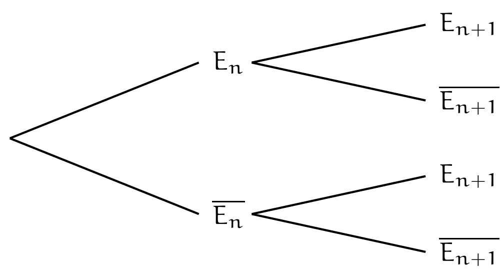
• si l'événement $\overline{E_1}$ est réalisé, le sac S_2 contient 3 billes jaunes et 2 biles vertes. On a donc $p_{\overline{E_1}}(E_2) = \dfrac{2}{5}$.

La formule des probabilités totales permet alors d'écrire

$$p(E_2) = p(E_1 \cap E_2) + p(\overline{E_1} \cap E_2) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) + p(\overline{E_1}) \times p_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}.$$

$$\boxed{p(E_2) = \frac{12}{25}.}$$

b) Représentons la situation par un arbre.



La formule des probabilités totales permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} p(E_{n+1}) &= p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \\ &= p(E_n) \times \frac{3}{5} + p(\overline{E_n}) \times \frac{2}{5} = p(E_n) \times \frac{3}{5} + (1 - p(E_n)) \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}p(E_n) + \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p(E_{n+1}) = \frac{1}{5}p(E_n) + \frac{2}{5}.}$$

2) Etude d'une suite

a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n \leq \dfrac{1}{2}$.

• $u_1 = \dfrac{2}{5} = 0,4$ et donc $u_1 \leq \dfrac{1}{2}$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 1$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $u_n \leq \dfrac{1}{2}$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \leq \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ et donc } u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n \leq \frac{1}{2}.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}\right) - u_n = -\frac{4}{5}u_n + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$$

Mais alors, puisque $\frac{1}{2} - u_n \geq 0$ d'après la question a), on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{n+1} \geq u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 1} \text{ est croissante.}}$$

c) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un certain réel que l'on note ℓ.
Maintenant, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = \frac{1}{5}\ell + \frac{2}{5}$ puis $\frac{4}{5}\ell = \frac{2}{5}$ et enfin $\ell = \frac{1}{2}$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$

3) Evolution des probabilités $p(E_n)$.

a) Les questions 1) et 2) montrent que la suite $(p(E_n))_{n\geq 1}$ est croissante et tend vers $\frac{1}{2}$.

b) Puisque l'énoncé ne fait pas calculer u_n en fonction de n, on peut espérer que l'encadrement soit obtenu rapidement. La machine fournit

n	$p(E_n)$
1	0,4
2	0,48
3	0,496
4	0,499 2
5	0,499 84
6	0,499 968
7	0,499 993 6

$$\boxed{\text{Le plus petit entier cherché est 7.}}$$

Ainsi, pour $n \leq 6$, on a $p(E_n) < 0{,}499\ 99$ et de plus $0{,}499\ 99 \leq p(E_7) \leq 0{,}5$. Mais alors, puisque la suite $(p(E_n))$ est croissante et majorée par $0,5$,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ (0{,}499\ 99 \leq p(E_n) \leq 0,5 \Leftrightarrow n \geq 7).}$$

