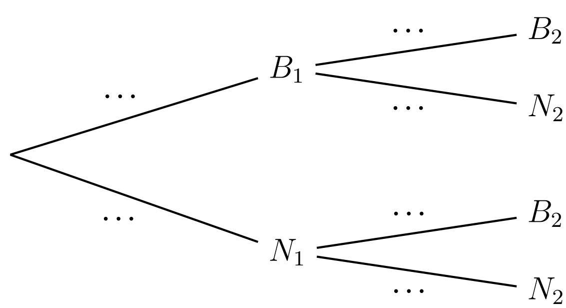
EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.
On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
On note B_1 (respectivement N_1) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1) **a)** Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



b) Montrer que la probabilité de l'événement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$**.**
Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.
Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

a) Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

d) Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.
Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.
Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.

Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 soit supérieure ou égale à 0,99.

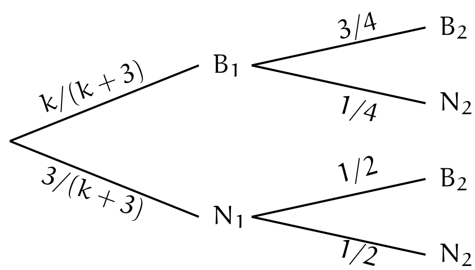
EXERCICE 2

1) a) L'urne U_1 contient $k+3$ boules et donc $p(B_1) = \dfrac{k}{k+3}$ et $p(N_1) = \dfrac{3}{k+3}$. Ensuite,

• si l'événement B_1 est réalisé, l'urne U_2 contient 4 boules dont 3 blanches et une noire. Donc $p_{B_1}(B_2) = \dfrac{3}{4}$ et $p_{B_1}(N_2) = \dfrac{1}{4}$.

• si l'événement N_1 est réalisé, l'urne U_2 contient 4 boules dont 2 blanches et 2 noires. Donc $p_{N_1}(B_2) = \dfrac{1}{2}$ et $p_{N_1}(N_2) = \dfrac{1}{2}$.

On peut alors compléter l'arbre de l'énoncé :



b) La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(N_1) \times p_{N_1}(B_2) = \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{k+3} \times \frac{1}{2} = \frac{3k+6}{4(k+3)} = \frac{3k+6}{4k+12}.$$

$$\boxed{p(B_2) = \frac{3k+6}{4k+12}.}$$

2) Quand $k = 12$, $p(B_2) = \dfrac{42}{60} = \dfrac{7}{10} = 0,7$ et donc $p(N_2) = 1 - p(B_2) = 0,3$.

a) Si le joueur gagne, son gain algébrique est $12 - 8 = 4$ euros et s'il perd, son gain algébrique est $0 - 8 = -8$ euros. Donc les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
b) La loi de probabilité de X est

x_i	4	-8
$p(X = x_i)$	$0,7$	$0,3$

c) $E(X) = 0,7 \times 4 + 0,3 \times (-8) = 2,8 - 2,4 = 0,4$.

$$\boxed{E(X) = 0,4.}$$

d) Puisque $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur.

3) Notons Y le nombre de fois que l'événement B_2 est réalisé. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'événement B_2 est réalisé » avec une probabilité $p = 0,7$ ou « l'événement N_2 est réalisé » avec une probabilité $1 - p = 0,3$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,7$.

La probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 est $p(Y \geq 1)$. Or

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,3^n.$$

Soit alors n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
1 - 0,3^n \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - 0,99 \geq 0,3^n \Leftrightarrow 0,3^n \leq 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln(0,3^n) \leq \ln(0,01) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,3) \leq \ln(0,01) \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,3)} \text{ (car } \ln(0,3) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geq 3,8\ldots \Leftrightarrow n \geq 4 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Le plus petit entier cherché est 4.

