

### EXERCICE 3 (5 points)

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties. La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.

Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1) On appelle :

$E_1$  l'événement « le joueur perd la première partie » ;

$E_2$  l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;

$E_3$  l'événement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

- Quelles sont les valeurs prises par  $X$  ?
  - Montrer que la probabilité de l'événement ( $X = 2$ ) est égale à 0,031 et que celle de l'événement ( $X = 3$ ) est égale à 0,002.
  - Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
  - Calculer l'espérance de  $X$ .
- 2) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $E_n$  l'événement : « le joueur perd la  $n$ -ième partie »,  $\overline{E}_n$  l'événement contraire, et on note  $p_n$  la probabilité de l'événement  $E_n$ .
- Exprimer, pour tout entier naturel  $n$  non nul, les probabilités des événements  $E_n \cap E_{n+1}$  et  $\overline{E}_n \cap E_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ .
  - En déduire que  $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.
- 3) On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :  $u_n = p_n - \frac{1}{19}$ .
- Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
  - En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n$  puis  $p_n$  en fonction de  $n$ .
  - Calculer la limite de  $p_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .