EXERCICE 3 (5 points)

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1) On appelle :
   E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;
   E_2 l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;
   E_3 l'événement « le joueur perd la troisième partie ».

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b) Montrer que la probabilité de l'événement ($X = 2$) est égale à 0,031 et que celle de l'événement ($X = 3$) est égale à 0,002.

   c) Déterminer la loi de probabilité de X.

   d) Calculer l'espérance de X.

2) Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'événement contraire, et on note p_n la probabilité de l'événement E_n.

   a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des événements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.

   b) En déduire que $p_{n+1} = 0{,}05p_n + 0{,}05$ pour tout entier naturel n non nul.

3) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

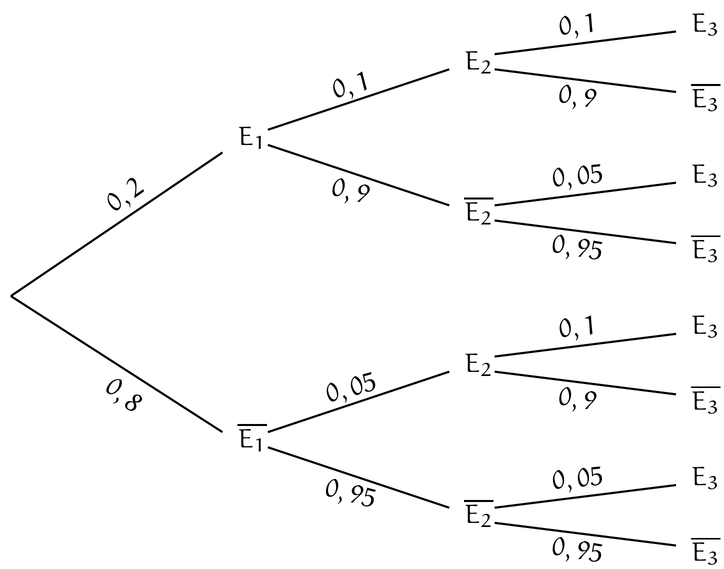
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.

   c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

1) Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



a) X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.

b) On a

$$p(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) = p(E_1 \cap E_2) \times p_{E_1 \cap E_2}(\overline{E_3}) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) \times p_{E_1 \cap E_2}(\overline{E_3}) = 0,2 \times 0,1 \times 0,9 = 0,018.$$

De même

$$p(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) = 0,2 \times 0,9 \times 0,05 = 0,009 \text{ et } p(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) = 0,8 \times 0,05 \times 0,1 = 0,004.$$

Par suite,

$$p(X = 2) = p(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) + p(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) + p(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) = 0,018 + 0,009 + 0,004 = 0,031.$$

On a aussi

$$p(X = 3) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0,2 \times 0,1 \times 0,1 = 0,002.$$

$$\boxed{p(X = 2) = 0,031 \text{ et } p(X = 3) = 0,002.}$$

c)

$$p(X = 0) = p(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = 0,8 \times 0,95 \times 0,95 = 0,722$$

et

$$p(X = 1) = 1 - p(X = 0) - p(X = 2) - p(X = 3) = 1 - 0,722 - 0,031 - 0,002 = 0,245.$$

La loi de probabilité de X est donc

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,722	0,245	0,031	0,002

d) $E(X) = \Sigma x_i p(X = x_i) = 0 \times 0,722 + 1 \times 0,245 + 2 \times 0,031 + 3 \times 0,002 = 0 + 0,245 + 0,062 + 0,006 = 0,313.$

$$\boxed{E(X) = 0,313.}$$

2) **a)** Soit n un entier naturel non nul.

$$p(E_n \cap E_{n+1}) = p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) = p_n \times 0,1 = 0,1p_n$$

et

$$p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = (1 - p_n) \times 0,05 = -0,05p_n + 0,05.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p(E_n \cap E_{n+1}) = 0,1p_n \text{ et } p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = -0,05p_n + 0,05.}$$

b) D'après la formule des probabilités totales on a alors

$$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = 0,1p_n - 0,05p_n + 0,05 = 0,05p_n + 0,05.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05.}$$

3) **a)** Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{19} \\ &= 0,05p_n + 0,05 - \frac{1}{19} = 0,05(p_n + 1 - \frac{1}{19 \times 0,05}) = 0,05(p_n + \frac{0,95 - 1}{19 \times 0,05}) = 0,05(p_n - \frac{0,05}{19 \times 0,05}) \\ &= 0,05(p_n - \frac{1}{19}) = 0,05u_n. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $0,05$. De plus,

$$u_1 = p_1 - \frac{1}{19} = 0,2 - \frac{1}{19} = \frac{1}{5} - \frac{1}{19} = \frac{14}{95}.$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de premier terme } u_1 = \frac{14}{95} \text{ et de raison } q = 0,05.}$$

b) On sait alors que pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{14}{95} \times 0,05^{n-1}$ puis $p_n = \frac{1}{19} + u_n = \frac{1}{19} + \frac{14}{95} \times 0,05^{n-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_n = \frac{1}{19} + \frac{14}{95} \times 0,05^{n-1}.}$$

c) Puisque $|0,05| < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,05^{n-1} = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{19}.}$$

