

EXERCICE 1 (5 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ».

L'événement contraire d'un événement E sera noté \bar{E} .

La probabilité d'un événement E sera notée $p(E)$.

Partie A

1. Montrer que $p(G) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1€ par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5€ ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
 - a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.
 - b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$.
Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.
Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?