Exercice 4 (*7 points*)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0,+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3-\ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante :
Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0,+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0,+\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)\left[3-\ln\left(f(t)\right)\right]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0,+\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(H) \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0,+\infty[$:

$$f(t) = \exp\left(3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto e^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$.

c. Résoudre dans $[0,+\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0{,}02$.

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Tournez la page S.V.P.

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'événement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'événement contraire et T l'événement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.

2. En déduire $P(T)$.

3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Exercice 4

Partie A

1. Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur $[0,+\infty[$. Alors la fonction $g=\ln(f)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout réel positif t, on a $g'(t)=\dfrac{f'(t)}{f(t)}$. Mais alors

$$\begin{aligned}\text{pour tout réel } t \text{ de } [0,+\infty[,\ f'(t)=-\frac{1}{20}f(t)\left[3-\ln(f(t))\right] &\Leftrightarrow \text{pour tout réel } t \text{ de } [0,+\infty[,\ \frac{f'(t)}{f(t)}=-\frac{1}{20}\left[3-\ln(f(t))\right]\\ &\Leftrightarrow \text{pour tout réel } t \text{ de } [0,+\infty[,\ g'(t)=-\frac{1}{20}\left[3-g(t)\right]\\ &\Leftrightarrow \text{pour tout réel } t \text{ de } [0,+\infty[,\ g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}.\end{aligned}$$

2. Si a et b sont deux réels, a étant non nul, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions de la forme

$$t\mapsto C.e^{at}-\frac{b}{a}\ \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Ici, $a=\dfrac{1}{20}$ et $b=-\dfrac{3}{20}$. Donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{les solutions sur } [0,+\infty[\text{ de l'équation } (H) \text{ sont les fonctions } g \text{ définies sur } [0,+\infty[\text{ par :}\\ \text{pour tout réel positif } t,\ g(t)=3+Ce^{t/20} \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}\end{array}}$$

3. Mais alors, d'après 1., il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0,+\infty[$,

$$f(t)=e^{g(t)}=\exp\left(3+C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

4. a. $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{20}=+\infty$. Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)=+\infty$, puis $\lim\limits_{t\to+\infty}3-3\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)=-\infty$. Comme $\lim\limits_{X\to-\infty}\exp(X)=0$, on a donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\exp\left(3-3\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right)=0$.

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}f(t)=0.}$$

b. f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif t, on a

$$f'(t)=\frac{1}{20}\times(-3)\exp\left(\frac{t}{20}\right)\times\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)=-\frac{3}{20}\exp\left(\frac{t}{20}\right)\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc, sur $[0,+\infty[$, f' est strictement négative sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0,+\infty[.}$$

c. Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned}
f(t) < 0,02 &\Leftrightarrow \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) < \frac{1}{50}\\
&\Leftrightarrow 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln(\frac{1}{50}) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow 3.\exp\left(\frac{t}{20}\right) > 3 + \ln(50) \Leftrightarrow \exp\left(\frac{t}{20}\right) > 1 + \frac{\ln(50)}{3}\\
&\Leftrightarrow \frac{t}{20} > \ln\left(1 + \frac{\ln(50)}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow t > 20\ln\left(1 + \frac{\ln(50)}{3}\right) = 16,6\ldots
\end{aligned}$$

Puisque $0,02$ millier d'individus $= 20$ individus, le réel ci-dessus est le nombre d'années cherché. On veut un nombre entier d'années à partir duquel la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus. Donc

$$\boxed{\text{au bout de 17 ans, la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus.}}$$

Partie B

1. L'énoncé donne directement $p(M) = p(\overline{M}) = 0,5$, puis $p_M(T) = 0,99$ et enfin $p_{\overline{M}}(T) = 0,001$.

2. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
p(T) &= p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M}) = p(M) \times p_M(T) + p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T)\\
&= 0,5 \times 0,99 + 0,5 \times 0,001 = 0,5 \times 0,991 = 0,4955.
\end{aligned}$$

$$\boxed{p(T) = 0,4955.}$$

3. $p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)} = \dfrac{0,5 \times 0,99}{0,4955} = 0,998\ldots$. Comme $p_T(M) < 0,999$,

$$\boxed{\text{le test n'est pas fiable.}}$$

