EXERCICE 3 (4 points)

On a posé à 1000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant.

Nombre de retards le 2ème mois \ Nombre de retards le 1^{er} mois	0	1	2 ou plus	*Total*
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1. On choisit au hasard un individu de cette population.

   a) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois.

   b) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.

2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul).

   On fait les hypothèses suivantes :

   - si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.
   - si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.
   - si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

   On note A_n l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n »,
   B_n l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n »,
   C_n l'événement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».

   Les probabilités des événements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n, r_n.

   a) Pour le premier mois ($n = 1$), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.

   b) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n .On pourra s'aider d'un arbre.

   c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,2\, p_n + 0,66$.

   d) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

   e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

EXERCICE 3

1. **a)** 572 personnes n'ont eu aucun retard le premier mois et donc $1000-572=428$ personnes ont eu au moins un retard le premier mois. La probabilité cherchée est

$$\boxed{\frac{428}{1000}=0{,}428.}$$

b) 572 personnes n'ont eu aucun retard le premier mois. Parmi celles-ci, $250+60=310$ personnes ont eu au moins un retard le deuxième mois. La probabilité cherchée est donc

$$\boxed{\frac{310}{572}=\frac{155}{286}=0,54\ldots}$$

2. **a)** $p_1=\dfrac{572}{1000}=0,572$, $q_1=\dfrac{318}{1000}=0,318$ et $r_1=\dfrac{110}{1000}=0,11$.

b) (Les probabilités fournies par l'énoncé sont des probabilités conditionnelles. Par exemple, $0,46=p_{A_n}(A_{n+1})$).
Chaque mois, un personne a soit 0 retard, soit exactement un retard, soit au moins deux retard, chacune de ces possibilités excluant les deux autres. Donc

$$\begin{aligned}p(A_{n+1})&=p(A_{n+1}\cap A_n)+p(A_{n+1}\cap B_n)+p(A_{n+1}\cap C_n)\\&=p(A_n)\times p_{A_n}(A_{n+1})+p(B_n)\times p_{B_n}(A_{n+1})+p(C_n)\times p_{C_n}(A_{n+1})\\&=0,46p_n+0,66q_n+0,66r_n.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_{n+1}=0,46p_n+0,66q_n+0,66r_n.}$$

c) Soit n un entier naturel non nul. On a bien sûr $p_n+q_n+r_n=1$ ou encore $q_n+r_n=1-p_n$. On en déduit que

$$p_{n+1}=0,46p_n+0,66(q_n+r_n)=0,46p_n+0,66(1-p_n)=-0,2p_n+0,66.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_{n+1}=-0,2p_n+0,66.}$$

d) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1}=p_{n+1}-0,55=-0,2p_n+0,66-0,55=-0,2p_n+0,11=-0,2(p_n-0,55)=-0,2.u_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } -0,2.}$$

e) Puisque $-1<-0,2<1$, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et comme $p_n=0,55+u_n$, on a donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}p_n=0,55.}$$

