EXERCICE 4 (3 points)

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à
$p(X \leq t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$.

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-2} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0,2}$.

2. A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $\mathrm{e}^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.
Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

EXERCICE 4

1. Calculons d'abord $p(X \leq t)$ et $p(X > t)$ pour λ réel et t réel positif donnés.

$$p(X \leq \lambda) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1),$$

et

$$p(X > t) = 1 - p(X \leq t) = e^{-\lambda t} \quad (2).$$

Par suite,

$$p(X > 6) = 0,3 \Leftrightarrow e^{-6\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow -6\lambda = \ln(0,3) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,3}{6}.$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{\ln(0,3)}{6} = 0,20 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}}$$

2. (L'énoncé est confus et il faut probablement le comprendre comme on a envie de le comprendre.)

Soit t un réel positif.

$$p(X \leq t) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,2t = \ln(0,5) \Leftrightarrow -0,2t = -\ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{0,2}.$$

0n a $\frac{\ln(2)}{0,2} = 3,46...$ Or 46% d'une année durent $\frac{46}{100} \times 12 = 5,5...$ mois. L'instant t cherché est donc

$$\boxed{\text{3 ans et 5 mois à un mois près.}}$$

3. La probabilité cherchée est $p(X > 2)$ c'est-à-dire $e^{-2.0,2} = e^{-0,4}$ (d'après (2) et puisque $\lambda = 0,2$).

4. La probabilité cherchée est $p((X > 6)/(X > 2))$. D'après (2), on a

$$p((X > 6)/(X > 2)) = \frac{p((X > 6) \cap (X > 2))}{p(X > 2)} = \frac{p(X > 6)}{p(X > 2)} = \frac{e^{-0,2.6}}{e^{-0,2.2}} = e^{-0,2.4} = e^{-0,8}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité cherchée est } e^{-0,8} \text{ ou encore } 0,44 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

5. Notons Y le nombre de robots qui n'ont pas eu de panne au cours des deux premières années. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le robot n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $p = e^{-0,4}$ (d'après 2.) ou « le robot est tombé en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $1 - p = 1 - e^{-0,4}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = e^{-0,4}$.

La probabilité demandée est $p(Y \geq 1)$ et on a

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (1 - e^{-0,4})^{10} = 0,99 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

