EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. A chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

a) Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?

b) Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?

c) Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?

d) Pour quelles valeurs de n a-t-on : $p_n > 0,99$?

2) Ce tireur participe au jeu suivant :

Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.

Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à $0,4096$ (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3) Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face *k*	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face *k*	58	49	52	41

a) Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

b) On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{4} \left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.

c) On effectue maintenant 1000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation de nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

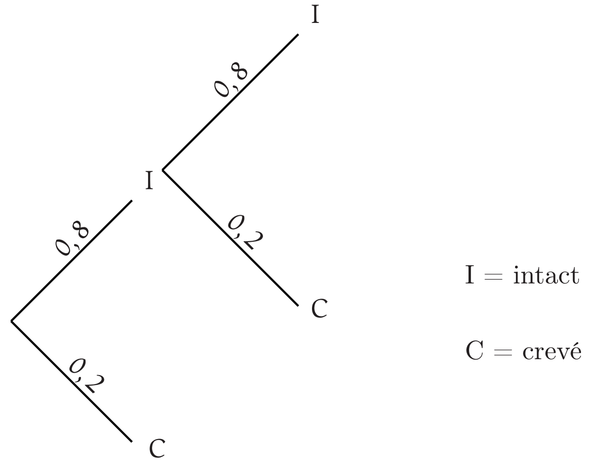
Minimum	**D_1**	**Q_1**	**Médiane**	**Q_3**	**D_9**	**Maximum**
0,00124	0,00192	0,00235	0,00281	0,00345	0,00452	0,1015

Au risque de 10%, peut-on considérer que ce dé est pipé ?

EXERCICE 4

1)

a) A chaque tir la probabilité que le ballon soit intact est $1 - 0,2$ ou encore $0,8$. Représentons la situation par un arbre.



Le ballon est intact au bout de deux tirs si et seulement si il est intact après le premier tir et après le second. La probabilité cherchée est donc

$$p = 0,8 \times 0,8 = 0,64.$$

b) (Deux tirs suffisent pour crever le ballon si et seulement si le ballon est crevé après le premier tir ou alors est intact après le premier tir et crevé après le second). L'événement contraire de cet événement est l'événement « le ballon est intact au bout de deux tirs » dont la probabilité a été calculée en a). La probabilité cherchée est donc

$$p_2 = 1 - p = 0,36.$$

c) Soit n un entier naturel non nul. (n tirs suffisent pour crever le ballon si et seulement si le ballon est crevé après le premier tir ou bien intact après le premier tir et crevé après le second ou intact après les deux premiers tirs et crevé après le troisième ... ou intact après les $n-1$ premiers tirs et crevé après le n-ème). L'événement contraire de l'événement « n tirs suffisent pour crever le ballon » est l'événement « le ballon est intact au bout de n lancers » dont la probabilité est $(0,8)^n$. La probabilité cherchée est donc

$$\boxed{p_n = 1 - (0,8)^n.}$$

d) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} p_n > 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,8)^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,01 > (0,8)^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,01) > n\ln(0,8) \text{ (par stricte croissance de } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} = 20,6\ldots \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 21. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 21$, la probabilité que n tirs suffisent pour crever le ballon est strictement supérieure à $0,99$.

2) Le tireur crève le ballon si et seulement si

• il obtient un 1 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de 1 tir

ou

• il obtient un 2 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de au plus 2 tirs

ou

• il obtient un 3 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de au plus 3 tirs ou

• il obtient un 4 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de au plus 4 tirs

Pour k entier compris entre 1 et 4 la probabilité que le tireur obtienne le n° k en lançant le dé puis crève le ballon en au plus k lancers est $\frac{1}{4}p_k = \frac{1}{4}(1-(0,8)^k)$. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{1}{4}\left[(1-(0,8)^1)+(1-(0,8)^2)+(1-(0,8)^3)+(1-(0,8)^4)\right] = 1-\frac{1}{4}(0,8)\frac{1-(0,8)^4}{1-0,8} = 1-(1-(0,8)^4) = (0,8)^4 = 0,4096.$$

3)

a) $f_1 = \frac{58}{200} = 0,29$, $f_2 = \frac{49}{200} = 0,245$, $f_3 = \frac{52}{200} = 0,26$ et $f_4 = \frac{41}{200} = 0,205$.

b)

$$\begin{aligned} d^2 &= (0,29-0,25)^2 + (0,245-0,25)^2 + (0,26-0,25)^2 + (0,205-0,25)^2 \\ &= 0{,}001\ 6 + 0{,}000\ 025 + 0{,}000\ 1 + 0{,}002\ 025 \\ &= 0{,}003\ 75. \end{aligned}$$

c) Le nombre 0,003 75 se trouve entre le minimum et le neuvième décile de la série des 200 lancers d'un dé bien équilibré. On sait alors que on ne peut pas considérer que le dé est pipé au risque de 10%.

