EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :
B_1, contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5880 sont exactes,
B_2, contenant 4000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes,

1) On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$A \ : \ \frac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}} \quad B \ : \ \frac{3}{120}$$

$$C \ : \ \binom{10}{3} \times \left(\frac{120}{6000}\right)^3 \times \left(\frac{5880}{6000}\right)^7 \quad D \ : \ \binom{10}{3} \times \left(\frac{3}{120}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5880}\right)^7$$

2) Parmi les 10000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'etiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

$$A \ : \ 0,98 \quad B \ : \ \frac{0,4 \times 0,95}{0,6 \times 0,98 + 0,6 \times 0,02} \quad C \ : \ 0,6 \times 0,98 \quad D \ : \ \frac{0,6 \times 0,98}{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,95}$$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0005$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p([0;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx.$$

1) La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2500 heures est :

$$A \ : \ e^{-\frac{2500}{2000}} \quad B \ : \ e^{\frac{5}{4}} \quad C \ : \ 1 - e^{-\frac{2500}{2000}} \quad D \ : \ e^{-\frac{2000}{2500}}$$

2) La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule :

$$E = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, dx.$$

a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, dx$ est égale à :

$$A\ :\ \lambda \frac{t^2}{2} e^{-\lambda t} \quad B\ :\ -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \quad C\ :\ \lambda t e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} - \lambda \quad D\ :\ te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}$$

b) La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

$$A\ :\ 3500 \quad B\ :\ 2000 \quad C\ :\ 2531,24 \quad D\ :\ 3000$$

EXERCICE 3

I.1.	**C**
I.2.	**D**
II.1.	**A**
II.2.a.	**B**
II.2.b.	**B**

Explications.

Première partie

1. Notons X le nombre d'étiquettes comportant une adresse erronée. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'étiquette comporte une adresse erronée » avec une probabilité $p = \dfrac{120}{6000}$ ou « l'étiquette comporte une adresse exacte » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{5880}{6000}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{120}{6000}$.

La probabilité demandée est $p(X = 3)$ et on a

$$p(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{120}{6000}\right)^3\left(\frac{5880}{6000}\right)^7.$$

2. Notons E l'événement « l'étiquette comporte une adresse exacte ». La probabilité demandée est $p_E(B_1)$. Il y a $5880 + 3800 = 9680$ étiquettes comportant une adresse exacte et donc $p(E) = \dfrac{9680}{10000}$. D'autre part, il y a 5880 étiquettes comportant une adresse exacte et provenant de la banque B_1 et donc $p(E \cap B_1) = \dfrac{5880}{10000}$. Par suite,

$$p_E(B_1) = \frac{p(E \cap B_1)}{p(E)} = \frac{\frac{5880}{10000}}{\frac{9680}{10000}} = \frac{147}{242} = 0,607\ldots.$$

Seule la fraction de la réponse D vaut environ $0,607$. L'énoncé calcule cette probabilité de la façon suivante

$$\begin{aligned}
p_E(B_1) &= \frac{p(E \cap B_1)}{p(E)} = \frac{p(B_1) \times p_{B_1}(E)}{p(E \cap B_1) + p(E \cap B_2)} \text{ (formule des probabilités totales)}\\
&= \frac{p(B_1) \times p_{B_1}(E)}{p(B_1) \times p_{B_1}(E) + p(B_2) \times p_{B_2}(E)} = \frac{0,6 \times \frac{5880}{6000}}{0,6 \times \frac{5880}{6000} + 0,4 \times \frac{3800}{4000}}\\
&= \frac{0,6 \times 0,98}{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,95}.
\end{aligned}$$

Deuxième partie

Soit t un réel positif. $p([0;t[) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,0005t}$.

1. $p([2500;+\infty[) = 1 - p([0;2500[) = e^{-0,0005 \times 2500} = e^{-\frac{2500}{2000}}$.

2. a. Soit t un réel positif. Pour $x \in [0,t]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-\lambda x}$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[0,t]$ et pour $x \in [0,t]$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. De plus les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,t]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx &= \int_0^t x \times \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[x \times (-e^{-\lambda x})\right]_0^t - \int_0^t -e^{-\lambda x}\,dx\\
&= -te^{-\lambda t} - \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^t = -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

b. Puisque $\lambda > 0$, $e^{-\lambda t}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. D'autre part, d'après les théorèmes de croissances comparées

$$\lim_{t\to+\infty} -te^{-\lambda t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\lambda}(-\lambda t)e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}\lim_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0.$$

Donc

$$E = 0 - 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0005} = 2000.$$

