EXERCICE 4

1) Soient λ et t deux réels.

$$p([0\ ;\ t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$p([0\ ;\ 200[) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-200\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-200\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -200\lambda = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow -200\lambda = -\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{200}.$$

2) L'événement « le composant a une durée de vie supérieure à 300 semaines » est l'événement contraire de l'événement « le composant n'est plus en état de marche au bout de 300 semaines. Sa probabilité est donc $1 - p([0\ ;\ 300[)$. Or

$$1 - p([0\ ;\ 300[) = \exp(-\frac{\ln 2}{200}.300) = \exp(-1,5 \times \ln 2) = \exp(\ln(2^{-1,5})) = 2^{-1,5} = 0,35...$$

Notons encore que $2^{-1,5} = \dfrac{1}{2^{1,5}} = \dfrac{1}{2^1 \times 2^{0,5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

$$\boxed{\text{la probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure à 300 semaines est } \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ c'est-à-dire } 0,35 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}}$$

3) **a)** Soient λ et A deux réels strictement positifs. Pour tout réel positif x, on pose

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-\lambda x}.$$

Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[0, A]$ et pour tout réel x de $[0, A]$, on a

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx &= \int_0^A x \times (\lambda e^{-\lambda x})\,dx \\
&= \left[x(-e^{-\lambda x})\right]_0^A - \int_0^A 1.(-e^{-\lambda x})\,dx = -Ae^{-\lambda A} - \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A \\
&= -Ae^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A} - 1}{\lambda} = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout réel strictement positif } A, \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}.}$$

b) En tenant compte du fait que λ est strictement positif, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\lambda A} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} -\lambda A e^{-\lambda A} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$. Finalement,

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\ln 2}.$$

Finalement,

$$\boxed{d_m = \frac{200}{\ln 2} \text{ ou encore } d_m = 288 \text{ semaines à une semaine près.}}$$

