EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0\,;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$. Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;200[) = 0{,}5$.

1) Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

3) On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.

a) Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

EXERCICE 4

1) Soient λ et t deux réels.

$$p([0\,;\,t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$p([0\,;\,200[) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-200\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-200\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -200\lambda = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow -200\lambda = -\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{200}.$$

2) L'événement « le composant a une durée de vie supérieure à 300 semaines » est l'événement contraire de l'événement « le composant n'est plus en état de marche au bout de 300 semaines. Sa probabilité est donc $1 - p([0\,;\,300[)$. Or

$$1 - p([0\,;\,300[) = \exp(-\frac{\ln 2}{200}.300) = \exp(-1,5 \times \ln 2) = \exp(\ln(2^{-1,5})) = 2^{-1,5} = 0,35...$$

Notons encore que $2^{-1,5} = \dfrac{1}{2^{1,5}} = \dfrac{1}{2^1 \times 2^{0,5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

la probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure à 300 semaines est $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ c'est-à-dire $0,35$ à 10^{-2} près par défaut.

3) **a)** Soient λ et A deux réels strictement positifs. Pour tout réel positif x, on pose

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-\lambda x}.$$

Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[0, A]$ et pour tout réel x de $[0, A]$, on a

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx &= \int_0^A x \times (\lambda e^{-\lambda x})\,dx \\ &= \left[x(-e^{-\lambda x})\right]_0^A - \int_0^A 1.(-e^{-\lambda x})\,dx = -Ae^{-\lambda A} - \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A \\ &= -Ae^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A} - 1}{\lambda} = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}.\end{aligned}$$

pour tout réel strictement positif A, $\displaystyle\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En tenant compte du fait que λ est strictement positif, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\lambda A} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} -\lambda A e^{-\lambda A} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$. Finalement,

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\ln 2}.$$

Finalement,

$d_m = \dfrac{200}{\ln 2}$ ou encore $d_m = 288$ semaines à une semaine près.

