Antilles Guyane. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (7 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Partie A

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p.
Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement« Romane se déplace en vélo ».

1) Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

2) Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

3) On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

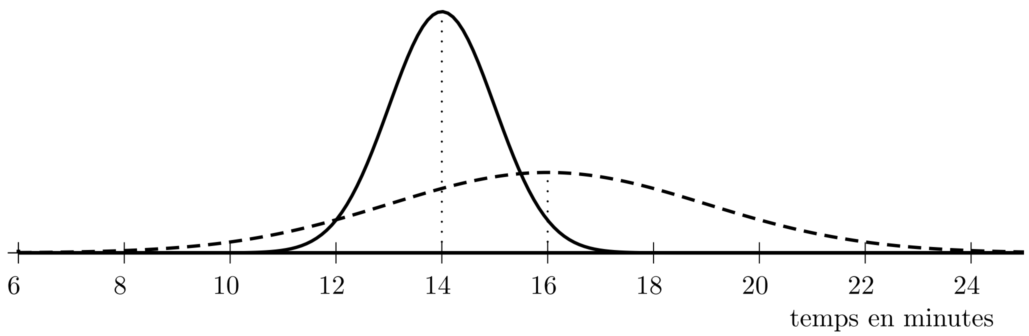
a) Calculer la valeur de p.

b) Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\dfrac{1}{3}$.

Partie B

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire T_V suivant une loi normale d'espérance μ_V et d'écart-type 1 minute.
Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T_C suivant une loi normale d'espérance μ_C et d'écart-type 3 minutes.

1) On nomme $\mathcal{C}_C$ et $\mathcal{C}_V$ les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires T_V et T_C représentées dans la figure ci-dessous.
Déterminer, en justifiant votre réponse, μ_V et μ_C.



2) Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes.
Arrondir la réponse à 10^{-4}.

3) Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail ?

Partie C

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi exponentielle de paramètre λ, réel strictement positif.
La fonction de densité associée est donc la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

1) Soit b un réel positif. Démontrer, à l'aide d'une intégrale, que

$$P(X \leqslant b) = 1 - e^{-\lambda b}.$$

2) On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9.

a) En déduire la valeur exacte de λ.

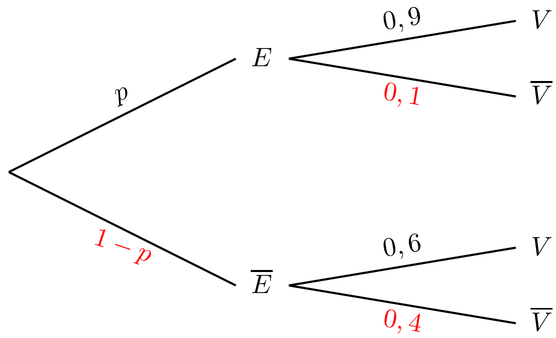
b) Calculer la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit supérieure à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures.

Antilles Guyane. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(V) &= P(E\cap V) + P\left(\overline{E}\cap V\right) \\ &= P(E)\times P_E(V) + P\left(\overline{E}\right)\times P_{\overline{E}}(V) = p\times 0,9 + (1-p)\times 0,6 = 0,3p + 0,6. \end{aligned}$$

3) a) L'énoncé donné $P(V) = 0,675$.

$$0,3p + 0,6 = 0,675 \Leftrightarrow 0,3p = 0,075 \Leftrightarrow p = \frac{0,075}{0,3} \Leftrightarrow p = \frac{0,75}{3} \Leftrightarrow p = 0,25.$$

b) La probabilité demandée est $P_V(E)$.

$$P_V(E) = \frac{P(E\cap V)}{P(V)} = \frac{P(E)\times P_E(V)}{P(V)} = \frac{0,25\times 0,9}{0,3\times 0,25 + 0,6} = \frac{0,225}{0,675} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité que la journée soit ensoleillée sachant que Romane s'est déplacée en vélo est $\frac{1}{3}$.

Partie B

1) $\sigma_V < \sigma_C$. Donc, la courbe en trait plein, qui est plus ressérée que la courbe en pointillés, est la courbe représentative de la fonction de densité de la variable T_V. μ_V est l'abscisse du sommet de cette courbe et donc $\mu_V = 14$ puis $\mu_C = 16$.

2) La probabilité demandée est $P\left(10 \leqslant T_V \leqslant 15\right)$. La calculatrice fournit $P\left(10 \leqslant T_V \leqslant 15\right) = 0,841\,3$ arrondi à 10^{-4}.

3) La calculatrice fournit $P\left(T_V \leqslant 15\right) = 0,841\,3$ arrondi à 10^{-4} et $P\left(T_C \leqslant 15\right) = 0,3694\ldots$ arrondi à 10^{-4}. Pour maximiser les chances d'avoir un temps de trajet d'au maximum 15 minutes, Romane doit choisir le vélo.

Partie C

1)

$$P(X \leqslant b) = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^b = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda b},$$

et donc aussi $P(X \geqslant b) = P(X > b) = 1 - P(X \leqslant b) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda b}\right) = e^{-\lambda b}$.

2) a) L'énoncé donne $P(X > 50) = 0,9$.

$$P(X > 50) = 0,9 \Leftrightarrow e^{-50\lambda} = 0,9 \Leftrightarrow -50\lambda = \ln\left(\frac{9}{10}\right) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{50}\ln\left(\frac{9}{10}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{50}\ln\left(\frac{10}{9}\right).$$

b) La probabilité demandée est $P_{X\geqslant 200}(X \geqslant 250)$. On sait que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc,

$$P_{X\geqslant 200}(X \geqslant 250) = P_{X\geqslant 0}(X \geqslant 50) = P(X \geqslant 50) = 0,9.$$

