Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.

On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$. De plus, une observation statistique a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : $P(X \leqslant 170) = 0,02$.

Question 1 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'évènement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 grammes » ?

Réponse a : 0,04 **Réponse b** : 0,96
Réponse c : 0,98 **Réponse d** : On ne peut pas répondre car il manque des données.

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible.
Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.
Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,05$.

Question 2 : Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

Réponse a : 0,72 **Réponse b** : 0,28
Réponse c : 0,54 **Réponse d** : On ne peut pas répondre car il manque des données

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,02$.
Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

Question 3 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

Réponse a : 0,02 **Réponse b** : 0,67
Réponse c : 0,44 **Réponse d** : 0,01

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

Réponse a : 0,45 **Réponse b** : 1
Réponse c : 0,55 **Réponse d** : On ne peut pas répondre car il manque des données

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à $0,05$. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5 : Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

Réponse a : 40 **Réponse b** : 400
Réponse c : 1600 **Réponse d** : 20

Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Question 1. Déterminons l'écart-type σ de X. On note que $X \leqslant 170 \Leftrightarrow X - 175 \leqslant -5 \Leftrightarrow \dfrac{X-175}{\sigma} \leqslant -\dfrac{5}{\sigma}$ ou de plus la variable $Z = \dfrac{X-175}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. L'énoncé fournit $P\left(Z \leqslant -\dfrac{5}{\sigma}\right) = 0,02$. La calculatrice fournit $-\dfrac{5}{\sigma} = -2,053\ldots$ et donc $\sigma = 2,43$ arrondi à 10^{-2}.

La probabilité demandée est $P(170 \leqslant X \leqslant 180)$. La calculatrice donne $P(170 \leqslant X \leqslant 180) = 0,96$ arrondie au centième. La bonne réponse est la réponse b.

Question 2. Notons X le nombre de bonbons déformés. X suit une loi binomiale. En effet,

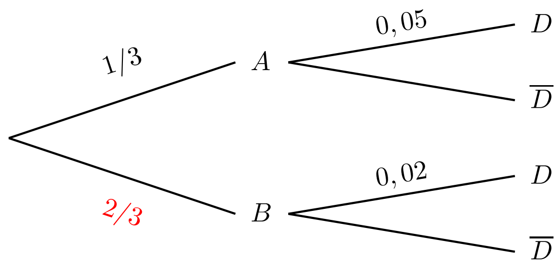
- $n = 50$ expériences identiques et indépendantes (en supposant que le nombre total de bonbons est grand de sorte que la probabilité qu'un bonbon soit déformé ne change pas quand on prélève un bonbon) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux éventualités, « le bonbon est déformé » avec une probabilité $p = 0,05$ et « le bonbon n'est pas déformé » avec une probabilité $1 - p = 0,95$.

Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,05$. La probabilité demandée est $P(X \geqslant 2)$.

$P(X \geqslant 2) = 1-P(X \leqslant 1) = 1-P(X=0)-P(X=1) = 1-(0,95)^{50}-50\times(0,05)\times(0,95)^{49} = 0,72$ arrondie au centième).

La bonne réponse est la réponse a.

Question 3. Représentons la situation par un arbre de probabilités. En notant A l'événement « le bonbon est produit par la machine A », B l'événement « le bonbon est produit par la machine B » et D l'événement « le bonbon est déformé »,



La probabilité demandée est $P_D(B)$. L'énoncé donne $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et donc $P(B) = \dfrac{2}{3}$, $P_A(D) = 0,05$ (fourni à la question 2) et $P_B(D) = 0,02$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) = \frac{1}{3} \times 0,05 + \frac{2}{3} \times 0,02 = \frac{0,09}{3} = 0,03.$$

Mais alors,

$$P_D(B) = \frac{P(D \cap B)}{P(D)} = \frac{P(B) \times P_B(D)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0,02}{0,03} = 0,44 \text{ arrondie au centième.}$$

La bonne réponse est la réponse c.

Question 4. On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. L'énoncé donne $\dfrac{1}{\lambda} = 500$ et donc $\lambda = \dfrac{1}{500} = 0,002$. Pour tout réel positif t,

$$P(Y \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,002t}.$$

En particulier, $P(Y \leqslant 300) = 1 - e^{-0,002\times 300} = 1 - e^{-0,6} = 0,45$ arrondie au centième. La bonne réponse est la réponse a.

Question 5. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où n est le nombre de personnes interrogées et f est la fréquence des plus de 20 ans. L'amplitude de cet intervalle est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,05 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant \frac{2}{0,05} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 40 \Leftrightarrow \left(\sqrt{n}\right)^2 \geqslant 40^2 \Leftrightarrow n \geqslant 1600.$$

La bonne réponse est la réponse c.

