Asie 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Question préliminaire.

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif.
On rappelle que, pour tout réel a positif, on a : $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt$.
Démontrer que, pour tout réel a positif, $P(T > a) = e^{-\lambda t}$.
Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2\,800}$.

Les durées seront données au jour près, et les probabilités au millième près

Partie A : étude d'un exemple

1) Calculer la probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours.

2) Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours ?

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Le fabricant de ces lampes affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 heures est de 94 %.
Un laboratoire indépendant qui doit vérifier cette affirmation fait fonctionner un échantillon aléatoire de 400 lampes pendant 180 jours.
On suppose que les lampes tombent en panne indépendamment les unes des autres.
Au bout de ces 180 jours, 32 de ces lampes sont en panne.
Au vu des résultats des tests, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 %, la proportion annoncée par le fabricant ?

Partie C : dans une salle de spectacle

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à led.
On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1) Calculer $P(X > 445)$, la probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an.

2) Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes. Quelle doit-être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95 % ?

Asie 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

Question préliminaire.

$$P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a}$$

puis

$$P(T > a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}.$$

Partie A : étude d'un exemple

1) $P(T \geqslant 180) = P(T > 180) = e^{-\frac{1}{2800}\times 180} = 0,938$ arrondie au millième.

2) La loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc,

$$P_{T>180}(T > 180 + 180) = P(T > 180) = 0,938 \text{ arrondie au millième.}$$

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Ici, $n = 400$ et on fait l'hypothèse que $p = 94\%$. On note que $np = 376$ et $n(1-p) = 24$ de sorte que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,94 - 1,96\sqrt{\frac{0,94\times 0,06}{400}}; 0,94 + 1,96\sqrt{\frac{0,94\times 0,06}{400}}\right] = [0,916; 0,964]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{400-32}{400} = \dfrac{368}{400} = 0,92$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et donc on ne peut pas remettre en cause l'affirmation du fabricant.

Partie C : dans une salle de spectacle

1) La calculatrice fournit $P(X > 445) = 0,247$ arrondie à 10^{-3}.

2) Soit a le nombre d'ampoules en stock. Le nombre d'ampoules en bon état au bout d'un an est X et donc le nombre d'ampoules défectueuses au bout d'un an est $500 - X$. Le stock est suffisant pour changer toutes les ampoules défectueuses si et seulement si $a \geqslant 500 - X$ ou encore $X \geqslant 500 - a$. Donc, on cherche a tel que $P(X \geqslant 500 - a) \geqslant 0,95$. De plus,

$$P(X \geqslant 500 - a) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X \leqslant 500 - a) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow P(X \leqslant 500 - a) \leqslant 0,05.$$

Déterminons d'abord a tel que $P(X \leqslant 500 - a) = 0,05$. La calculatrice fournit $500 - a = 427$ arrondi à l'unité inférieure ou encore $a = 73$ arrondi à l'unité supérieure.

Donc, la taille minimale du stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95% est 73.

