Rochambeau 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1) Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

2) Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

3) Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
A-t-il raison ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1) Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$.
Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.

2) De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.
Sachant que $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1) Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

a) On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

b) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

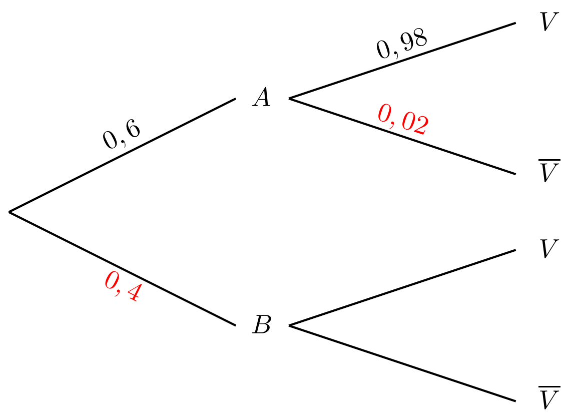
2) Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

Rochambeau 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) L'énoncé donne $P(V) = 0,96$, $P(A) = 0,6$ et $P_A(V) = 0,98$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(A \cap V)$.

$$P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0,6 \times 0,98 = 0,588.$$

2) D'après la formule des probabilités totales, $P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V)$ et donc

$$P(B \cap V) = P(V) - P(A \cap V) = 0,96 - 0,588 = 0,372.$$

Ensuite,

$$P_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{0,372}{0,4} = 0,93.$$

3) La probabilité demandée est $P_{\overline{V}}(B)$.

$$P_{\overline{V}}(B) = \frac{P\left(\overline{V} \cap B\right)}{p(V)} = \frac{P(B) - P(V \cap B)}{1 - (P(A \cap V) + P(B \cap V))} = \frac{0,4 - 0,372}{1 - (0,372 + 0,588)} = \frac{0,028}{0,0,04} = 0,7.$$

Le technicien a donc raison.

Partie B

1) La probabilité demandée est $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1)$. La calculatrice fournit $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1) = 0,9309\ldots$ ou encore $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1) = 0,93$ au centième près.

D'autre part, $P_B(V) = \dfrac{P(B \cap V)}{P(B)} = \dfrac{0,372}{0,4} = 0,93$. Donc, la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien égale au centième près à celle de la partie A.

2) $0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1 \Leftrightarrow -0,1 \leqslant Y - 1 \leqslant 0,1 \Leftrightarrow -\dfrac{0,1}{\sigma'} \leqslant \dfrac{Y-1}{\sigma'} \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}$. On sait que la variable $Z = \dfrac{Y-1}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite et de plus, $P\left(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1\right) = P\left(-\dfrac{0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}\right)$. Ensuite, pour des raisons de symétries,

$$P\left(Z \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = P\left(-\frac{0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) + P\left(Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98 + \frac{0,02}{2} = 0,99.$$

La calculatrice fournit

$$P\left(Z \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,99 \Leftrightarrow \frac{0,1}{\sigma'} = 2.3263\ldots \Leftrightarrow \sigma' = 0,0429\ldots$$

Donc, $\sigma' = 0,043$ arrondi à 10^{-3}.

Partie C

1) a) Notons X la variable aléatoire égale au nombre de billes noires dans le sachet.

- 40 expériences identiques et indépendantes sont effectuées.
- chaque expérience a deux issues à savoir « la bille est noire » avec une probabilité $p = \dfrac{1}{5}$ et « la bille n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{4}{5}$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = \dfrac{1}{5}$. La probabilité demandée est $P(X = 10)$. On sait que

$$P(X = 10) = \binom{40}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{40-10} = 0,107 \text{ arrondi à } 10^{-3}$$

(fourni par la calculatrice).

b) Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95%. Ici, $n = 40$ et $p = \dfrac{1}{5} = 0,2$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 8$ et $n(1-p) = 32$ de sorte que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,2 - 1,96\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{40}}, 0,25 + 1,96\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{40}}\right] = [0,07; 0,33]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{12}{40} = 0,3$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et donc on ne peut pas remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes.

2) Soit n le nombre de billes dans un sachet. Le nombre de billes noires de ce sachet est une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$. La probabilité que le sachet contienne au moins une bille noire est

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,8)^n.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,8)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geqslant (0,8)^n \Leftrightarrow (0,8)^n \leqslant 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,8)^n\right) \leqslant \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 20,6\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Le nombre minimal de billes que doit contenir un sachet pour avoir une probabilité supérieure à $0,99$ d'avoir au moins une bille noire est 21.

