Polynésie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.

Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.

L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1) Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ $0,451$.

2) Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à $0,95$? Arrondir ce temps à la minute près.

3) L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1) On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est $0,494$.

2) On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2 500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.

L' astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

Polynésie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) On sait que pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,2t}.$$

Par suite,

$$P(T \leqslant 3) = 1 - e^{-0,2\times 3} = 1 - e^{-0,6} = 0,451 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2) Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned} P(T \leqslant t) = 0,95 &\Leftrightarrow 1 - e^{-0,2t} = 0,95 \Leftrightarrow -e^{-0,2t} = -0,05 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,05 \\ &\Leftrightarrow -0,2t = \ln(0,05) \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,05)}{0,2} \Leftrightarrow t = 14,9\ldots \\ &\Leftrightarrow t = 15 \text{ min arrondi à la minute.} \end{aligned}$$

Le groupe doit attendre 15 minutes arrondi à la minute pour avoir une probabilité de $0,95$ de voir une nouvelle étoile filante.

3) On sait que l'espérance de T est $\dfrac{1}{\lambda}$ c'est-à-dire 5. Ceci signifie qu'il s'écoule en moyenne 5 minutes entre deux apparitions d'étoiles filantes ou encore que dans chaque intervalle de temps de 5 minutes, le groupe voit en moyenne une étoile filante. Comme 2 heures sont égales à 24 intervalles de temps de 5 minutes, on peut estimer à 24 en moyenne le nombre d'étoiles filantes vues par le groupe pendant 2 heures (et pas à 25 car le début de la sortie n'a aucune raison de coïncider avec l'apparition d'une étoile filante).

Partie B

1) Notons N l'événement « la personne est un nouvel adhérent » et T l'événement « la personne possède un télescope personnel ».
L'énoncé fournit $P(N) = 0,64$, $P\left(\overline{N} \cap T\right) = 0,27$ et $P_N\left(\overline{T}\right) = 0,65$. La probabilité demandée est $P(T)$

Tout d'abord, $P_{\overline{N}}(T) = \dfrac{P\left(\overline{N} \cap T\right)}{P\left(\overline{N}\right)} = \dfrac{0,27}{1 - 0,64} = \dfrac{0,27}{0,36} = 0,75$. Ensuite, $P\left(\overline{N}\right) = 1 - P(N) = 1 - 0,64 = 0,36$ et $P_N(T) = 1 - P_N\left(\overline{T}\right) = 1 - 0,65 = 0,35$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(N) \times P_N(T) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(T) = 0,64 \times 0,35 + 0,36 \times 0,75 = 0,494.$$

2) La probabilité demandée est $P_T(N)$.

$$P_T(N) = \frac{P(N \cap T)}{P(T)} = \frac{P(N) \times P_N(T)}{P(T)} = \frac{0,64 \times 0,35}{0,494} = 0,453 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

Partie C

Sous l'hypothèse que $p = 0,5$, déterminons un intervalle de fluctuation au seuil 95%. On note que $n = 100$ et donc $n \geqslant 30$ puis $np = n(1-p) = 50$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\begin{aligned} \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] &= \left[0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5\times 0,5}{100}}; 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{0,5\times 0,5}{100}}\right] \\ &= \left[0,5 - 1,96\frac{0,5}{10}; 0,5 + 1,96\frac{0,5}{10}\right] = [0,402; 0,598]. \end{aligned}$$

La fréquence observée est $f = 0,54$. f appartient à l'intervalle de fluctuation. Le résultat du sondage ne l'amène pas à changer d'avis.

