Nouvelle Calédonie mars 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (7 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une boite contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.
Parmi les argentées 60% représentent le château de Blois, 30% le château de Langeais, les autres le château de Saumur.
Parmi les dorées 40% représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.
On tire au hasard une médaille de la boite. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

- A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;
- D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;
- B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;
- L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;
- S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1) Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

a) Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.

b) Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\dfrac{21}{40}$.

c) Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?

2) Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre $9,9$ et $10,1$ grammes.
On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1) Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type $0,06$.
On note C l'évènement « la médaille est conforme ».
Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme.
On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

2) La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.

a) Soit Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z ?

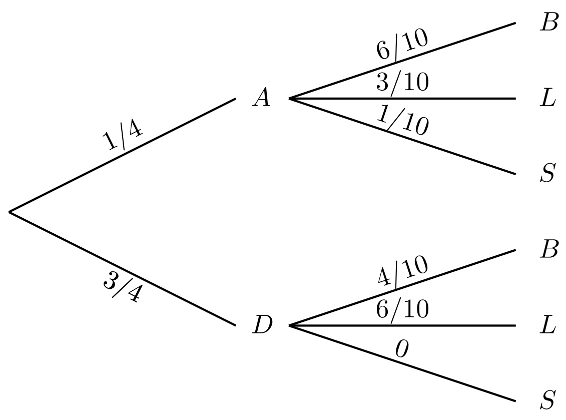
b) Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.

Nouvelle Calédonie mars 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



a) La probabilité demandée est $p(A \cap L)$.

$$P(A \cap L) = p(A) \times p_A(L) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{40}.$$

$$\boxed{P(A \cap L) = \frac{3}{40}.}$$

b) La probabilité demandée est $p(L)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(L) = p(A) \times p_A(L) + p(D) \times p_D(L) = \frac{3}{40} + \frac{3}{4} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{40} + \frac{18}{40} = \frac{21}{40}.$$

$$\boxed{P(L) = \frac{21}{40}.}$$

c) La probabilité demandée est $p_L(D)$.

$$p_L(D) = \frac{p(D \cap L)}{p(L)} = \frac{p(D) \times p_D(L)}{p(L)} = \frac{(3/4) \times (6/10)}{21/40} = \frac{18}{40} \times \frac{40}{21} = \frac{6}{7}.$$

$$\boxed{P_L(D) = \frac{6}{7}.}$$

2) Si la médaille tirée représente le château de Saumur, il est certain que cette médaille est argentée ou encore

$$\boxed{p_S(A) = 1.}$$

Partie B

1) Pour des raisons de symétrie, la probabilité demandée est $P(X < 9,9) + P(X > 10,1) = P(X < \mu - 0,1) + P(X > \mu + 0,1) = 2P(X \leqslant \mu - 0,1) = 2P(X \leqslant 9,9)$. La calculatrice fournit

$$2P(X \leqslant 9,9) = 0,096 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'une médaille produite par la machine } M_1 \text{ ne soit pas conforme est arrondi à } 10^{-3}.}$$

2) a) On sait que Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

b) La probabilité que la machine M_2 produise une médaille non conforme est $P(Y < 9,9) + P(Y > 10,1) = 2P(Y \leqslant 9,9)$. Or

$$Y \leqslant 9,9 \Leftrightarrow Y - 10 \leqslant -0,1 \Leftrightarrow \frac{Y-10}{\sigma} \leqslant -\frac{0,1}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma}.$$

Par suite,

$$2P(Y \leqslant 9,9) = 0,06 \Leftrightarrow 2P\left(Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,06 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,03.$$

La calculatrice fournit $-\dfrac{0,1}{\sigma} = -1,88079\ldots$ puis

$$\boxed{\sigma = 0,053 \text{ arrondi au millième.}}$$

