Polynésie septembre 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\text{ng.mL}^{-1}\right)$, d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1) Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.
Calculer la probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL^{-1}.

2) Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL^{-1} et que 10% d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL^{-1}.

On appelle T' la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en ng.mL^{-1} chez une personne atteinte par la maladie étudiée.
On admet que T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

Préciser la valeur de μ' et déterminer la valeur de σ'.

Partie B

Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang. On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 ng.mL^{-1}.
Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

- M l'évènement « le patient est atteint par la maladie étudiée » ;
- D l'évènement « le patient a un dépistage positif ».

On admet que :

- 82% des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;
- 73% des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.

On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1) Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est de $0,325$.

2) Calculer $P_{\overline{D}}(M)$. Interpréter ce résultat.

3) Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensez- vous ?

Partie C

Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez des sujets à jeun.
Les données montrent que 82% des patients malades ont un dépistage positif.
Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.
On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun.
Le dépistage se révèle positif pour 74% d'entre elles.
Ce dépistage peut-il être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun ?

Polynésie 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) La probabilité demandée est $P(T \geqslant 60)$. La calculatrice fournit

$$P(X \geqslant 60) = 1 - P(X \leqslant 60) = 0,006 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2) L'énoncé fournit $\mu' = 50$ et $P(T' \leqslant 43) = 0,1$. Or

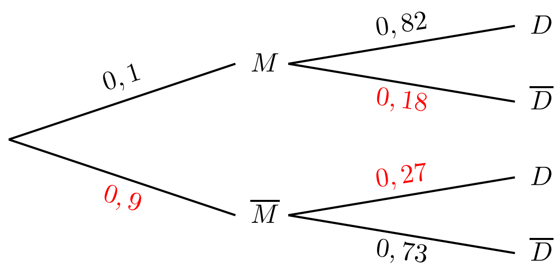
$$T' \leqslant 43 \Leftrightarrow T' - 50 \leqslant -7 \Leftrightarrow \frac{T' - 50}{\sigma'} \leqslant -\frac{7}{\sigma'}.$$

La calculatrice fournit

$$P(T' \leqslant 43) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(\frac{T' - 50}{\sigma'} \leqslant -\frac{7}{\sigma'}\right) = 0,1 \Leftrightarrow -\frac{7}{\sigma'} = -1,2815\ldots \Leftrightarrow \sigma' = 5,46 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

Partie B

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$P(D) = P(M) \times P_D(M) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(D) = 0,1 \times 0,82 + (1 - 0,1)(1 - 0,73) = 0,082 + 0,243$$
$$= 0,325.$$

$$\boxed{P(D) = 0,325.}$$

2) $P_{\overline{D}}(M)$ est la probabilité qu'un individu ayant un test négatif soit tout de même malade.

$$P_{\overline{D}}(M) = \frac{P\left(M \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{P(M) \times P_M\left(\overline{D}\right)}{1 - P(D)} = \frac{0,1(1 - 0,82)}{1 - 0,325} = \frac{0,018}{0,675} = \frac{2}{75} = 0,027 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{P_{\overline{D}}(M) = 0,027 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

3) L'énoncé demande $P_D(M)$.

$$P_D(M) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M) \times P_M(D)}{P(D)} = \frac{0,1 \times 0,82}{0,325} = \frac{0,082}{0,325} = \frac{82}{325} = 0,25 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

Le médecin a donc raison.

Partie C

Déterminons un intervalle de fluctuation au seuil 95%. Ici, $n = 300$ et $p = 0,82$. Notons que $n \geqslant 30$, $np = 246$ et donc $np \geqslant 5$ et aussi $n(1-p) = 52$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,82 - 1,96\sqrt{\frac{0,82 \times 0,18}{300}}; 0,82 + 1,96\sqrt{\frac{0,82 \times 0,18}{300}}\right] = [0,776; 0,864]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée sur l'échantillon est $f = 0,74$. f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. Donc, le dépistage ne peut pas être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun au risque de se tromper de 5%.

