

Antilles Guyane septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x , où x est un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

Par ailleurs, 20% des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

- R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
- J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

- 1) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- 2) Déterminer la valeur exacte de x .
- 3) Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

- 1) Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . On en donnera les paramètres.
- 2) Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ».
On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Un fournisseur assure que 90% des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2% de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2% de pulpe.

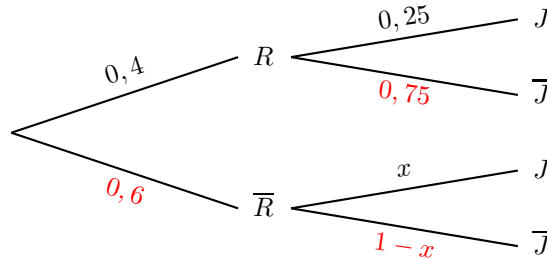
- 1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2% de pulpe au seuil de 95%.
- 2) Que penser de l'affirmation du fournisseur ?

Antilles Guyane septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) L'énoncé fournit $P(R) = 0,4$, $P_R(J) = 0,25$, $P_{\bar{R}} = x$ et $P(J) = 0,2$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(J) = P(R) \times P_R(J) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(J),$$

ou encore

$$0,20 = 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times x,$$

et donc

$$x = \frac{0,2 - 0,4 \times 0,25}{0,6} = \frac{0,2 - 0,1}{0,6} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}.$$

$$x = \frac{1}{6}.$$

3) La probabilité demandée est $P_J(R)$.

$$P_J(R) = \frac{P(R \cap J)}{P(J)} = \frac{P(R) \times P_R(J)}{P(J)} = \frac{0,4 \times 0,25}{0,2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

$$P_J(R) = 0,5.$$

Partie B

1) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 500 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues, « la bouteille est pur jus » avec une probabilité $p = 0,2$ et « la bouteille n'est pas pur jus » avec une probabilité $1 - p = 0,8$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,2$.

2) La probabilité demandée est $P(X \geq 75)$. La calculatrice fournit

$$P(X \geq 75) = 1 - P(X \leq 74) = 0,998 \text{ arrondi au millième.}$$

Partie C

1) Ici, $n = 900$ et $p = 0,9$. On note que $n \geq 30$ puis $np = 810$ et donc $np \geq 5$ et aussi $n(1-p) = 90$ et donc $n(1-p) \geq 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = \left[0,9 - 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{900}}; 0,9 + 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{900}} \right] = [0,8804; 0,9196].$$

2) La fréquence observée est $f = \frac{766}{900} = 0,851$ arrondi à 10^{-3} . La fréquence f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et on peut donc penser que l'affirmation du fournisseur est fautive au risque de se tromper de 5%.