Nouvelle Calédonie mars 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles.
À la sortie de fabrication, 5% d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées. Les puces restantes sont livrées aux clients.

On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1 000 heures. On observe que 2% des puces livrées ont une durée de vie courte.

On note L l'évènement « La puce est livrée ».
On note C l'évènement « La puce a une durée de vie courte c'est-à-dire inférieure ou égale à 1 000 heures ».

Étant donné deux évènements A et B, on note $P_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1) On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.

a) Donner la valeur $P_L(C)$.

b) Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1 000 heures ?

c) Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaîne de fabrication ?

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

2) On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce.
On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a) Montrer que $\lambda = \dfrac{-\ln(0,98)}{1\ 000}$.

b) Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 10 000 heures.
On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

c) Calculer $P(20\ 000 \leqslant X \leqslant 30\ 000)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat.

3) Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à $0,003$.

On prélève au hasard 15 000 puces prêtes à être livrées- On admettra que ce prélèvement de 15 000 puces revient à effectuer un tirage avec remise de 15 000 puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.

a) Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 15\ 000$ et $p = 0,003$.

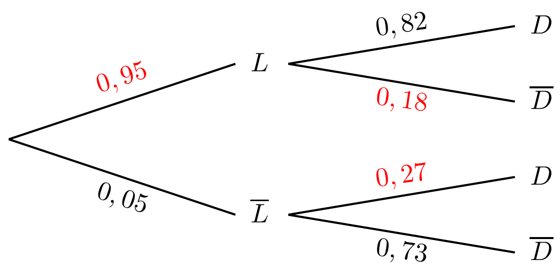
b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

c) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité $P(40 \leqslant Y \leqslant 50)$.

Nouvelle Calédonie mars 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) L'énoncé fournit $P_L(C) = 0,02$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est $P\left(L\cap\overline{C}\right)$.

$$P\left(L\cap\overline{C}\right) = P(L)\times P_L\left(\overline{C}\right) = \left(1-P\left(\overline{L}\right)\right)\left(1-P_L(C)\right) = (1-0,05)(1-0,02) = 0,95\times 0,98 = 0,931.$$

c) La probabilité demandée est $P\left(\overline{L}\cup C\right)$.

$$\begin{aligned}P\left(\overline{L}\cup C\right) &= P\left(\overline{L}\cup(L\cap C)\right) = P\left(\overline{L}\right)+P\left(L\cap C\right)\ \left(\text{car } \overline{L}\cap(L\cap C)=\varnothing\right)\\ &= P\left(\overline{L}\right)+P(L)-P\left(L\cap\overline{C}\right)\ \text{(d'après la formule des probabilités totales)}\\ &= 1-P\left(L\cap\overline{C}\right) = 1-0,931 = 0,069.\end{aligned}$$

2) a) L'énoncé fournit $P(X>1000) = 0,98$. Soit $x>0$.

$$\begin{aligned}P(X>x) &= 1-P(X\leqslant x) = 1-\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1-\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1-\left(\left(-e^{-\lambda x}\right)-\left(-e^0\right)\right) = 1-\left(1-e^{-\lambda x}\right)\\ &= e^{-\lambda x},\end{aligned}$$

puis

$$P(X>1000) = 0,98 \Leftrightarrow e^{-1000\lambda} = 0,98 \Leftrightarrow -1000\lambda = \ln(0,98) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,98)}{1000}.$$

b) La probabilité demandée est $P(X\geqslant 10\,000)$.

$$P(X\geqslant 10\,000) = e^{-10\,000\lambda} = e^{10\ln(0,98)} = 0,817 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

c)

$$P(20\,000\leqslant X\geqslant 30\,000) = P(X\geqslant 20\,000)-P(X\geqslant 30\,000) = e^{20\ln(0,98)}-e^{30\ln(0,98)} = 0,122 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

Ceci signifie qu'environ $12,2\%$ des puces auront une durée de vie comprise entre 20 000 et 30 000 heures.

3) a) La variable alétaoire Y est régie par un schéma de BENOULLI. En effet,

• 15 000 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
• chaque expérience a deux issues à savoir « la puce a une durée de vie courte » avec une probabilité $p = 0,003$ et « la puce n'a pas une durée de vie courte » avec une probabilité $1-p = 0,997$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0,003$.

b) $E(Y) = np = 15\,000\times 0,003 = 45$.

c) La calculatrice fournit

$$P(40\leqslant Y\leqslant 50) = P(Y\leqslant 50)-P(Y\leqslant 39) = 0,589 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

