Centres étrangers 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A

1) Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock. A cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.

Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?
On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2) Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1) Calculer $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.

2) Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05.
On ne réalimente pas le stock en cours de mois.

Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C

On admet maintenant que, dans le magasin :

- 80 % des cadenas proposés à la vente sont *premier prix*, les autres *haut de gamme* ;
- 3 % des cadenas *haut de gamme* sont défectueux ;
- 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- p la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux ;
- H l'événement : « le cadenas prélevé est *haut de gamme* » ;
- D l'évènement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel p.
Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A - 2. ?

3) Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.

Centres étrangers 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Ici, $n = 500$ et $p = 0,03$. On note que $n \geqslant 30$ puis $np = 15 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 485 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est

$$\left[0,03 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,03(1-0,03)}}{\sqrt{500}}; 0,03 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,03(1-0,03)}}{\sqrt{500}}\right] = [0,015; 0,045]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. D'autre part, la fréquence observée est $f = \dfrac{19}{500} = 0,38$. La fréquence de cadenas défectueux observée appartient à l'intervalle de fluctuation et donc le contrôle ne remet pas en cause le fait que le stock ne contient pas plus de 3% de cadenas défectueux.

2) De nouveau $n = 500$ et d'autre part, la fréquence observée est $f = \dfrac{39}{500}$. On note que $n \geqslant 30$, $nf = 39 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 461 \geqslant 5$. Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}}; 0,078 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right] = [0,033; 0,123]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

Partie B

1) La calculatrice (ou le cours) fournit $P(725 \leqslant X \leqslant 775) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0,68$ arrondi à 10^{-2}.

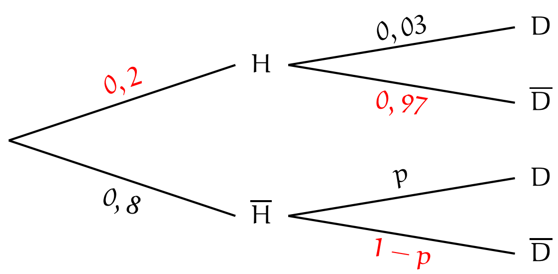
2) On cherche la plus petite valeur n_0 de l'entier n tel que $P(X > n) \leqslant 0,05$ ou encore $1 - P(X \leqslant n) \leqslant 0,05$ ou enfin $P(X \leqslant n) \geqslant 0,95$. La calculatrice fournit $P(X = x_0) = 0,95 \Leftrightarrow x_0 = 791,1\ldots$. Puisque la fonction $x \mapsto P(X \geqslant x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, pour n entier naturel,

$$P(X > n) \leqslant 0,05 \Leftrightarrow n \geqslant x_0 \Leftrightarrow n \geqslant 792.$$

La plus petite valeur de n cherchée est 792.

Partie C

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(D) = P(H) \times P_H(D) + P\left(\overline{H}\right) \times P_{\overline{H}}(D) = 0,2 \times 0,03 + 0,8p = 0,8p + 0,006.$$

D'autre part, l'énoncé donne $P(D) = 0,07$.

$$0,8p + 0,006 = 0,07 \Leftrightarrow 0,8p = 0,064 \Leftrightarrow p = \frac{0,064}{0,8} \Leftrightarrow p = 0,08.$$

La probabilité p appartient à l'intervalle de confiance $[0,033; 0,123]$ obtenu à la question 2) de la partie A. Le résultat obtenu est donc cohérent avec le résultat de A-2).

3) La probabilité demandée est $P_{\overline{D}}(H)$.

$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{P\left(H \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{P(H) \times P_H\left(\overline{D}\right)}{1 - P(D)} = \frac{0,2 \times (1 - 0,03)}{1 - 0,07} = 0,21 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$