Asie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.

Partie A

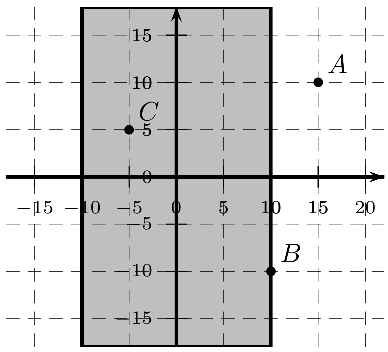
Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. A chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à $0,8$.

1) Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants.
Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.

2) Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois ?

Partie B

Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée ci-contre. Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (en grisé sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.
On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées.
On note X la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.



Ainsi, par exemple :

- si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et X prend la valeur 15 ;
- si elle atteint le point B, l'impact est à la limite de la bande, et X prend la valeur 10 ;
- si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et X prend la valeur -5.

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1) Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit situé hors de la bande grisée.

2) Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à $0,6$?

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1) Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2 000 heures ?

2) *Restitution organisée des connaissances*
Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.
On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $E(T) = \lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt$.

a) On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

b) En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?

Asie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de flèches qui atteignent la cible. X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues, « la flèche atteint la cible »avec une probabilité $p = 0,8$ et « la flèche n'atteint pas la cible »avec une probabilité $1 - p = 0,2$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8$.

La probabilité demandée est $P(X \geqslant 3)$. La calculatrice fournit

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} 0,8^3 0,2^1 + \binom{4}{4} 0,8^4 0,2^0 = 0,8^4 + 4 \times 0,8^3 \times 0,2 = 2 \times 0,8^4 \\ &= 0,819 \text{ arrondi au millième.} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \geqslant 3) = 0,819 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) Dans cette question, on note n le nombre de flèches tirées et X la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. On sait que $E(X) = np = 0,8n$. On veut que cette espérance soit égale à 12.

$$E(X) = 12 \Leftrightarrow 0,8n = 12 \Leftrightarrow n = \frac{12}{0,8} \Leftrightarrow n = 15.$$

$$\boxed{\text{Le concurrent doit prévoir 15 flèches pour atteindre 12 fois la cible en moyenne.}}$$

Partie B

1) La probabilité demandée est $P((X < -10) \cup (X > 10)) = 1 - P(-10 \leqslant X \leqslant 10) = 1 - P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$. La calculatrice (ou le cours) fournit $P(-10 \leqslant X \leqslant 10) = 0,683$ arrondi au millième ou encore

$$\boxed{P((X < -10) \cup (X > 10)) = 0,317 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) Soit x l'abscisse du bord vertical droit de la cible. On veut $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 0,6$. Or

$$\begin{aligned} P(-x \leqslant X \leqslant x) &= P(X \leqslant x) - P(X \leqslant -x) = P(X \leqslant x) - P(X \geqslant x) = P(X \leqslant x) - (1 - P(X \leqslant x)) \\ &= 2P(X \leqslant x) - 1, \end{aligned}$$

puis $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 0,6 \Leftrightarrow 2P(X \leqslant x) - 1 = 0,6 \Leftrightarrow P(X \leqslant x) = 0,8$. La calculatrice fournit alors $x = 8,4$ arrondi au dixième.

Pour quer la probabilité considérée soit égale à $0,6$, il faut et il suffit que les bords verticaux aient pour équations respectives $x = 8,4$ arrondi au dixième et $x = -8,4$ arrondi au dixième.

Partie C

1) Soit a un réel positif.

$$\begin{aligned} P(T \leqslant a) &= \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a} \\ &= 1 - e^{-0,0001a} \end{aligned}$$

et aussi

$$P(T \geqslant a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-0,0001a}\right) = e^{-0,0001a}.$$

La probabilité demandée est $P(T \geqslant 2000)$.

$$P(T \geqslant 2000) = e^{-0,0001 \times 2000} = e^{-0,2} = 0,819 \text{ arrondi au millième.}$$

$$\boxed{P(T \geqslant 2000) = 0,819 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) a) La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$F'(t) = (-1)e^{-\lambda t} + \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) = -e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} = f(t).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Soit x un réel positif.

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \left[\left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^x = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^0 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(-\lambda x)e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}.$$

Déjà, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = \lim_{X\to-\infty} X e^X = 0.$$

On en déduit que

$$E(T) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda} + \frac{0}{\lambda} - \frac{0}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ici, $\lambda = 10^{-4}$ et donc $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 10^4$. Ainsi, l'espérance de durée de vie du panneau électrique est de 10 000 heures.

