

Antilles Guyane 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) Soit $\lambda > 0$. Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt &= \left[-\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \right]_0^x = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} + \left(0 + \frac{1}{\lambda}\right) e^0 \\ &= -\frac{\lambda x + 1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} (-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1).\end{aligned}$$

2) Puisque $\lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} y e^y = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$. Donc,

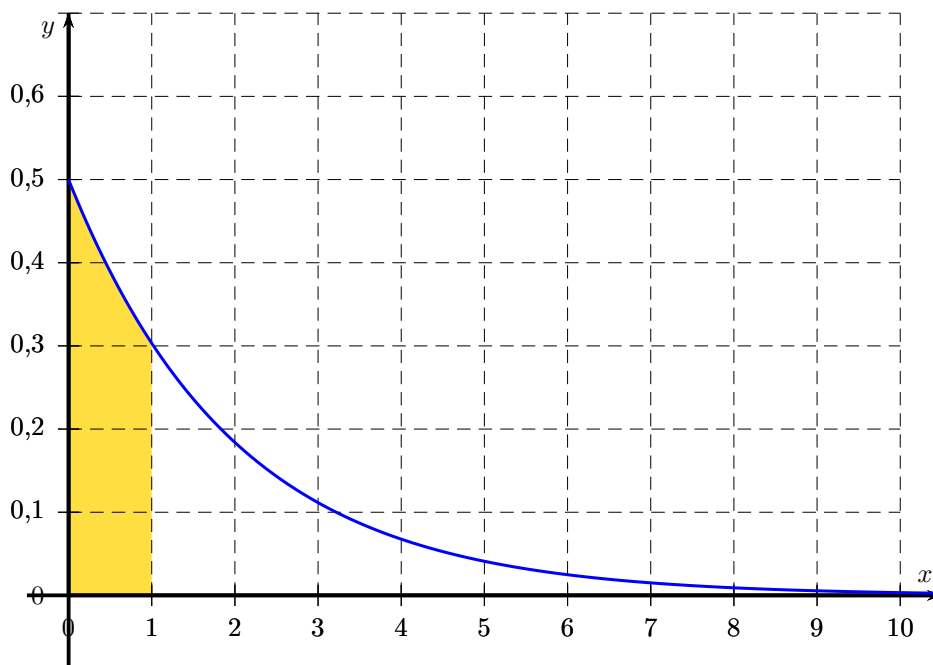
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} (-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1) = \frac{1}{\lambda} (0 + 0 + 1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ceci montre que

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Partie B

1) a) $P(X \leq 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx$. La fonction densité représentée sur le graphique ci-dessous est la fonction $g : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$. Donc, $P(X \leq 1)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré ci-dessous.



b) $g(0) = \lambda e^0 = \lambda$. λ est donc l'ordonnée du point de la courbe ci-dessus d'abscisse 0. Sur le graphique, on lit $\lambda = 0,5$.

2) a) Dire que $E(X) = 2$ signifie que en moyenne, la durée de vie d'un composant électronique est de 2 ans.

b) $\frac{1}{\lambda} = 2$ fournit $\lambda = \frac{1}{2}$ ou encore $\lambda = 0,5$.

c) Pour tout réel $a \geq 0$,

$$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^a = (-e^{-\lambda a}) - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda a} = 1 - e^{-0,5a}.$$

En particulier, $P(X \leq 2) = 1 - e^{-0,5 \times 2} = 1 - e^{-1} = 0,63$ arrondi à 0,01. Ceci signifie que la probabilité que le composant électronique fonctionne au plus deux ans est environ 0,63.

d) La probabilité demandée est $P_{X \geq 1}(X \geq 3)$.

$$P_{X \geq 1}(X \geq 3) = \frac{1 - (1 - e^{-0,5 \times 3})}{1 - (1 - e^{-0,5 \times 1})} = \frac{e^{-1,5}}{e^{-0,5}} = e^{-1}.$$

Partie C

1) La probabilité demandée, c'est-à-dire la probabilité que les deux composants soient défectueux avant un an, est $P(D_1 \cap D_2)$. Puisque les événements D_1 et D_2 sont indépendants,

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = (0,39)^2 = 0,1521.$$

2) L'événement « le circuit B est défectueux avant un an » est l'événement contraire de l'événement « aucun des deux composants n'est défectueux avant un an » qui est l'événement $\overline{D_1} \cap \overline{D_2}$. Puisque les événements D_1 et D_2 sont indépendants, on sait que les événements $\overline{D_1}$ et $\overline{D_2}$ sont indépendants. Donc

$$P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = P(\overline{D_1}) \times P(\overline{D_2}) = (1 - 0,39)^2 = 0,61^2 = 0,3721.$$

La probabilité demandée est alors

$$1 - P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = 1 - 0,3721 = 0,6279.$$