Polynésie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à $0,6$.

Affirmation n° 1 :
« Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

2) Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B.

Affirmation n° 2 :
« Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. »

3) On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,7$.

Affirmation n° 3 :
« La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est $0,7$ environ. »

Affirmation n° 4 :
« Le temps d'attente moyen à ce guichet est de sept minutes. »

4) On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+.
On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A^+.

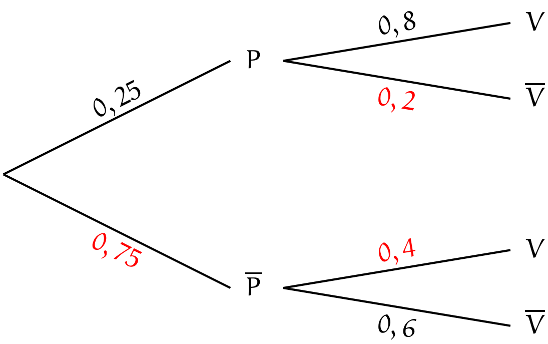
Affirmation n° 5 :
« On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A^+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. »

Polynésie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Affirmation 1	**VRAI**
Affirmation 2	**VRAI**
Affirmation 3	**FAUX**
Affirmation 4	**FAUX**
Affirmation 5	**VRAI**

Justification 1. Notons P l'événement « il pleut » et V l'événement « Zoé se rend à son travail en voiture ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $p(V)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(V) &= p(P \cap V) + p\left(\overline{P} \cap V\right) = p(P) \times p_P(V) + p\left(\overline{P}\right) \times p_{\overline{P}}(V) \\ &= 0,25 \times 0,8 + (1 - 0,25) \times (1 - 0,6) = 0,2 + 0,3 = 0,5. \end{aligned}$$

L'affirmation 1 est vraie.

Justification 2. Supposons que les événements A et B soient indépendants. On a donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. D'après la formule des probabilités totales, $p(A) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$ et donc

$$p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) - p(A \cap B) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A) \times (1 - p(B)) = p(A) \times p\left(\overline{B}\right).$$

Par suite, les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants. L'affirmation 2 est vraie.

Justification 3. On sait que pour tout réel t,

$$p(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi $p(T \geqslant t) = 1 - p(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$. La probabilité demandée est $p(T \geqslant 5)$. La calculatrice fournit

$$p(X \geqslant 5) = e^{-0,7 \times 5} = e^{-3,5} = 0,03\ldots$$

L'affirmation 3 est fausse.

Justification 4. On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$ avec $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,7} = 1,42\ldots$. Donc le temps d'attente moyen est environ $1,4$ minute. L'affirmation 4 est fausse.

Justification 5. Ici $n = 183$ et on suppose que $p = 0,39$. On note que $np = 71,37$ et donc $np \geqslant 5$ et aussi $n(1 - p) = 111,63$ et donc $n(1 - p) \geqslant 5$. L'intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,39 - 1,96\frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}}, 0,39 + 1,96\frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}}\right]$$

En arrondissant demanière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,31; 0,47]$.
La fréquence observée est $f = 0,34$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et donc on ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A^+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. L'affirmation 5 est vraie.

