

France métropolitaine. Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1) La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.

On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.

On choisit une pièce au hasard et on considère les événements suivants :

- A : « La pièce est produite par la machine A »,
- B : « La pièce est produite par la machine B »,
- D : « La pièce a un défaut »,
- \overline{D} , l'évènement contraire de l'évènement D.

a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

c) Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'évènement D est égale à 0,094.

d) On constate que la pièce choisie a un défaut.

Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

2) On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.

On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \frac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

a) Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b) Dans cette question, on prend $n = 150$.

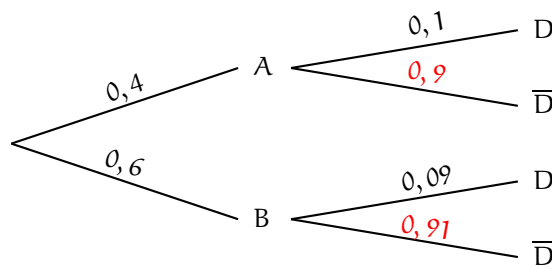
Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150} .

c) Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites.

Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) Représentons la situation par un arbre.



b) La probabilité demandée est $p(A \cap D)$.

$$p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D) = 0,4 \times 0,1 = 0,04.$$

$$p(A \cap D) = 0,04.$$

c) La probabilité demandée est $p(D)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A \cap D) + p(\bar{A} \cap D) = p(A) \times p_A(D) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(D) \\ &= 0,4 \times 0,1 + 0,6 \times 0,09 = 0,04 + 0,054 = 0,094. \end{aligned}$$

$$p(D) = 0,094.$$

d) La probabilité demandée est $p_D(A)$.

$$p_D(A) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{0,04}{0,094} = \frac{40}{94} = \frac{20}{47}.$$

$$p_D(A) = \frac{20}{47} = 0,426 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2) a) X_n suit une loi binomiale. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la pièce prélevée est conforme » avec une probabilité $p = 0,9$ et « la pièce prélevée n'est pas conforme » avec une probabilité $1 - p = 0,1$.

Donc, X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,9$.

b) Ici $n = 150$ et $p = 0,9$. L'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150} est

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96 \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,9 - 1,96 \frac{\sqrt{0,9 \times 0,1}}{\sqrt{150}}; 0,9 + 1,96 \frac{\sqrt{0,9 \times 0,1}}{\sqrt{150}} \right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,85; 0,95]$.

c) La fréquence de pièces conformes observée est $f = \frac{150 - 21}{150} = \frac{129}{150} = 0,86$. La fréquence f appartient à l'intervalle de fluctuation. On ne peut donc pas remettre en cause le réglage de la machine.