Rochambeau 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche.

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1) Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.

2) Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3) Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96% ? On arrondira le résultat au dixième.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96% de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.

2) Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de $0,913$. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

Dans toute la suite, on prendra $\lambda = 0,003$.

2) Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?

3) Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Rochambeau 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3

Partie A

1) $P(390 \leqslant X \leqslant 410) = P(X \leqslant 410) - (X < 390) = P(X \leqslant 410) - (X \leqslant 390) = 0,818 - 0,182 = 0,636$.

$$\boxed{P(390 \leqslant X \leqslant 410) = 0,636.}$$

2)

$$p = p\,(X \geqslant 385) = 1 - p(X < 385) = 1 - p(X \leqslant 385) = 1 - 0,086 = 0,914.$$

$$\boxed{p = 0,914.}$$

3) Posons $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-400}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 0.

$$X \geqslant 385 \Leftrightarrow X - 400 \geqslant -15 \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant -\frac{15}{\sigma} \Leftrightarrow Z \geqslant -\frac{15}{\sigma}.$$

L'énoncé donne $p(Z \leqslant -1,751) = 0,04$ (arrondi au millième) ou encore $p(Z \geqslant -1,751) = 0,96$. Par suite,

$$p(X \geqslant 385) = 0,96 \Leftrightarrow p\left(Z \geqslant -\frac{15}{\sigma}\right) = 0,96 \Leftrightarrow p\left(Z \geqslant -\frac{15}{\sigma}\right) = p(Z \geqslant -1,751).$$

D'après le cours, on sait que cette dernière égalité équivaut à $-\dfrac{15}{\sigma} = -1,751$ ou encore $\sigma = \dfrac{15}{1,751}$ ou enfin

$$\boxed{\sigma = 8,6 \text{ arrondi au dixième.}}$$

Partie B

1) Ici, $n = 300$ et $p = 0,96$. On note que $n \geqslant 30$ puis $np = 288$ et $n(1-p) = 12$ de sorte que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300 est

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,96 - 1,96\frac{\sqrt{0,96 \times 0,04}}{\sqrt{300}}, 0,96 + 1,96\frac{\sqrt{0,96 \times 0,04}}{\sqrt{300}}\right].$$

En arrondissant les bornes à 10^{-3} près de manière à élargir un peu cet intervalle, on trouve

$$\boxed{I = [0,937; 0,983].}$$

2) Faisons l'hypothèse que la proportion de pains commercialisables est $p = 0,96$. La fréquence de pains commercialisables observée dans l'échantillon est $f = \dfrac{283}{300}$ ou encore $0,943$ arrondi au millième.

f appartient à l'intervalle de fluctuation I. On peut donc accepter l'hypothèse faite sur p mais on ne connaît pas le risque de se tromper ou encore

$$\boxed{\text{on peut décider que l'objectif est atteint mais on ne connaît pas le risque de se tromper.}}$$

Partie C

1) On sait que pour tout réel t,

$$p\,(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi

$$p\left(T \geqslant t\right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}.$$

L'énoncé donne $p(T \geqslant 30) = 0,913$. Par suite,

$$\begin{aligned} p\left(T \geqslant 30\right) = 0,913 &\Leftrightarrow e^{-30\lambda} = 0,913 \\ &\Leftrightarrow -30\lambda = \ln\left(0,913\right) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,913)}{30}. \end{aligned}$$

La calculatrice fournit

$$\boxed{\lambda = 0,003 \text{ arrondi au millième.}}$$

Dans toute la suite, on prendra $\lambda = 0,003$.

2) La probabilité demandée est $p_{X \geqslant 60}\left(X \geqslant 90\right)$.

$$\begin{aligned} p_{X \geqslant 60}\left(X \geqslant 90\right) &= \frac{p\left((X \geqslant 60) \cap (X \geqslant 90)\right)}{p\left(X \geqslant 60\right)} = \frac{p\left(X \geqslant 90\right)}{p\left(X \geqslant 60\right)} \\ &= \frac{e^{-0,27}}{e^{-0,18}} = e^{-0,27-(-0,18)} = e^{-0,09}. \end{aligned}$$

La calculatrice fournit

$$\boxed{p_{X \geqslant 60}\left(X \geqslant 90\right) = e^{-0,09} = 0,914 \text{ arrondi au millième.}}$$

3) En considérant qu'une année compte 365 jours, la probabilité que la balance ne se dérègle pas avant un an est $p(X \geqslant 365)$. Or,

$$p(X \geqslant 365) = e^{-0,003 \times 365} = e^{-1,095} = 0,335 \text{ arrondi au millième.}$$

Cette probabilité est nettement inférieure à $0,5$ ou encore il y a nettement moins d'une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an.

Soit t un réel.

$$p(X \geqslant t) = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,003t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,003t = \ln(0,5) \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,5)}{0,003}.$$

La calculatrice fournit $-\dfrac{\ln(0,5)}{0,003} = 231,04\ldots$ soit environ 231 jours ou encore 7 mois et demi environ.

$$\boxed{\text{Il y a une chance sur deux que la balance ne se dérègle pas avant } 231 \text{ jours.}}$$

