

Pondichéry 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (6 points) (commun à tous les candidats)

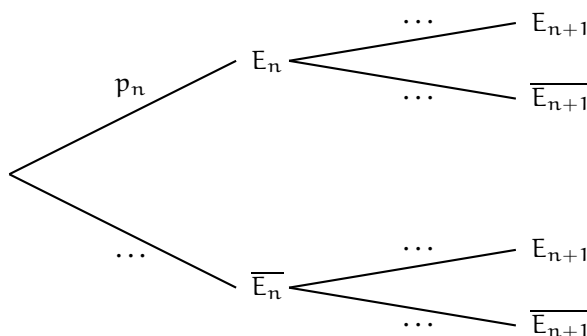
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

- 1) a) Déterminer la valeur de p_3 , à l'aide d'un arbre de probabilité.
 - b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
- 2) a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



- b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
- c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r . En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r .
- d) En déduire la limite de la suite (p_n) .
- e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ J prend la valeur $J + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher J

A quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

- 3) Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.
 - a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X .

- b) On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Le tableau suivant donne les probabilités de l'événement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x .

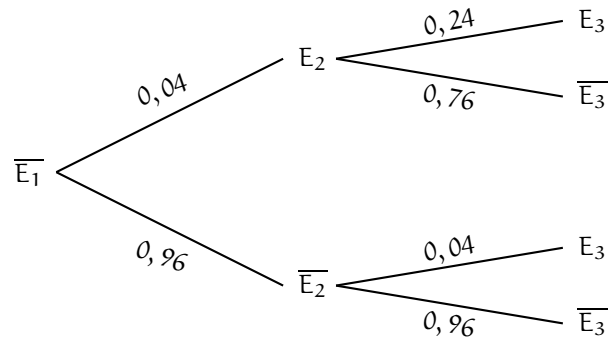
x	-1,55	-1,24	-0,93	-0,62	-0,31	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b), une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'événement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

Pondichéry 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) Représentons la situation par un arbre (E_1 est impossible et donc $\overline{E_1}$ est certain).



La probabilité demandée est $p_3 = p(E_3)$. La formule des probabilités totales fournit

$$p_3 = p(E_2 \cap E_3) + p(\overline{E_2} \cap E_3) = p(E_2) \times p_{E_2}(E_3) + p(\overline{E_2}) \times p_{\overline{E_2}}(E_3) \\ = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,0096 + 0,0384 = 0,048.$$

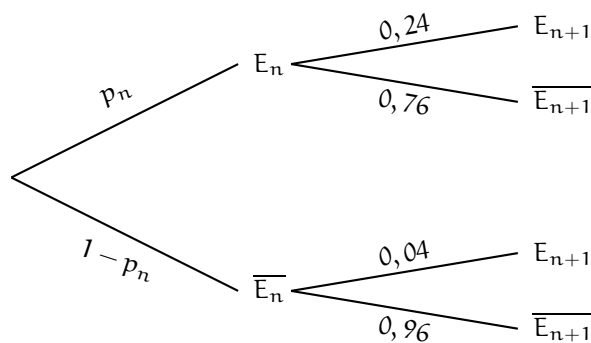
$$p_3 = 0,048.$$

b) La probabilité demandée est $p_{E_3}(E_2)$.

$$p_{E_3}(E_2) = \frac{p(E_2 \cap E_3)}{p(E_3)} = \frac{p(E_2) \times p_{E_2}(E_3)}{p(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{0,0096}{0,048} = \frac{96}{480} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$p_{E_3}(E_2) = 0,2.$$

2) a)



b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. D'après la formule des probabilités totales.

$$p_{n+1} = p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) \\ = 0,2p_n + 0,04.$$

$$\text{Pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 1, p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04.$$

c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n.$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $r = 0,2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,05 = -0,05$.

On sait alors que pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1},$$

et donc

$$p_n = u_n + 0,05 = 0,05 - 0,05 \times 0,2^{n-1}.$$

$$\text{pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 1, p_n = 0,05 - 0,05 \times 0,2^{n-1}.$$

d) Puisque $-1 < 0,2 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^{n-1} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,05.$$

e) A l'étape 1, P contient p_1 et plus généralement, à l'étape $j \geq 1$, P contient p_j . L'algorithme s'arrête dès que la variable J contient un numéro j tel que $p_j \geq 0,05 - 10^{-k}$ (où k est la valeur entrée dans la variable K). A partir de ce numéro, tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à $0,05 - 10^{-k}$.

L'algorithme affiche donc le plus petit numéro j tel que $p_j \geq 0,05 - 10^{-k}$.

Puisque la suite (p_n) converge vers $0,05$, pour tout entier naturel K , il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $p_n \geq 0,05 - 10^{-K}$. On en déduit que cet algorithme s'arrête.

3) a) X suit une loi binomiale. En effet,

- 220 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « le salarié est malade » avec une probabilité $p = 0,05$ et « le salarié n'est pas malade » avec une probabilité $p = 1 - 0,05 = 0,95$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 220$ et $p = 0,05$.

On sait que $\mu = np = 220 \times 0,05 = 11$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10,45} = 3,23$ à 10^{-2} près.

b) La probabilité demandée est $p(7 \leq X \leq 15)$. Or,

$$7 \leq X \leq 15 \Leftrightarrow \frac{7 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{15 - \mu}{\sigma}.$$

La probabilité demandée est donc aussi $p\left(\frac{7 - 11}{\sqrt{10,45}} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{15 - 11}{\sqrt{10,45}}\right)$ ou encore $p\left(-1,24 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 1,24\right)$ en arrondissant les bornes de l'encadrement à 10^{-2} .

L'énoncé nous dit que cette probabilité est environ :

$$\begin{aligned} p(-1,24 \leq Z \leq 1,24) &= p(Z \leq 1,24) - p(Z \leq -1,24) = p(Z < 1,24) - p(Z < -1,24) \\ &= 0,892 - 0,108 = 0,784. \end{aligned}$$

$$\text{La probabilité demandée vaut environ } 0,784.$$