Nouvelle Calédonie. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième.

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres.
Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type $0,4$.
Montrer qu'une valeur approchée à $0,000\,1$ près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est $0,012\,4$.
On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.

2) On met en place un contrôle de production tel que $98\ \%$ des billes hors norme sont écartés et $99\ \%$ des billes correctes sont conservées.
On choisit une bille au hasard dans la production. On note N l'évènement : « la bille choisie est aux normes », A l'évènement : « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».

a) Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité de l'évènement A.

c) Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.
On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de $0,012\,4$.
On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?

2) Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?

3) Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?

4) Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

Annexe

	A	B
1	d	$P(X < d)$
2	0	$3,06E-138$
3	1	$2,08E-112$
4	2	$2,75E-89$
5	3	$7,16E-69$
6	4	$3,67E-51$
7	5	$3,73E-36$
8	6	$7,62E-24$
9	7	$3,19E-14$
10	8	$2,87E-07$
11	9	$0,00620967$
12	10	$0,5$
13	11	$0,99379034$
14	12	$0,99999971$
15	13	1
16	14	1
17	15	1
18	16	1
19	17	1
20	18	1
21	19	1
22	20	1
23	21	1
24	22	1
25		

Copie d'écran d'une feuille de calcul

Nouvelle Calédonie. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) La probabilité que la bille choisie soit aux normes est

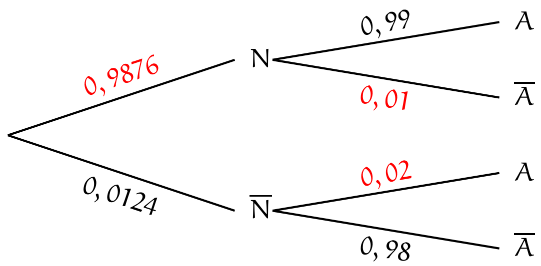
$$P(9 \leqslant X \leqslant 11) = P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9) = 0,99379034 - 0,00620967 = 0,98758067.$$

La probabilité que la bille choisie soit hors norme est

$$1 - P(9 \leqslant X \leqslant 11) = 1 - 0,98758067 = 0,01241933.$$

En arrondissant à 10^{-4}, on obtient $0,0124$.

2) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) = P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) \\ &= (1 - 0,0124) \times 0,99 + 0,0124 \times (1 - 0,98) = 0,9780 \text{ arrondi à } 10^{-4}. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = 0,9780 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

c) La probabilité demandée est $P_A\left(\overline{N}\right)$.

$$P_A\left(\overline{N}\right) = \frac{P\left(\overline{N} \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A)}{P(A)} = \frac{0,0124 \times 0,02}{0,9780} = 0,000253\ldots.$$

$$\boxed{P_A\left(\overline{N}\right) = 0,0003 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

Partie B

1) Y suit une loi binomiale. En effet,

- 100 expériences identiques et indépendantes sont effectuées (choisir une bille 100 fois) ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la bille est hors norme » avec une probabilité $p = 0,0124$ et « la bille choisie est aux normes » avec une probabilité $1 - p = 0,9876$.

Donc, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0124$.

2) On sait que l'espérance de Y est $E(Y) = np = 100 \times 0,0124 = 1,24$ et l'écart-type de Y est $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0,0124 \times 0,9876} = 1,1066$ arrondi à 10^{-4}.

$$\boxed{E(Y) = 1,24 \text{ et } \sigma(Y) = 1,1066 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

3) La probabilité demandée est $P(Y = 2)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(Y = 2) = 0,2241 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

4) La probabilité demandée est $P(Y \leqslant 1)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(Y \leqslant 1) = 0,6477 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

