

Asie 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80% de ses boîtes chez le fournisseur A et 20% chez le fournisseur B.

10% des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20% de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- événement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- événement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- événement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

- 1) Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
- 2) a) Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \bar{S}$?
b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.
- 3) On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

- 1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2) Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
- 3) Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88% de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».

Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88. On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

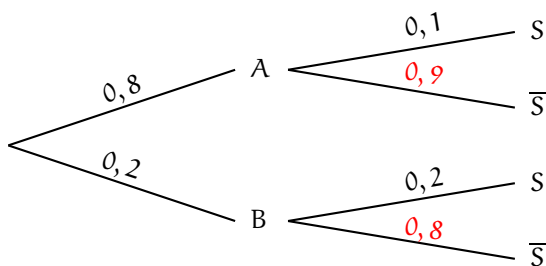
- 1) Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95%.
- 2) L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95%, que la publicité est mensongère ?

Asie 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre.



2) a)

$$p(B \cap \bar{S}) = p(B) \times p_B(\bar{S}) = p(B) \times (1 - p_B(S)) = 0,2 \times (1 - 0,2) = 0,16.$$

$$p(B \cap \bar{S}) = 0,16.$$

b) La probabilité demandée est $p(\bar{S})$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(\bar{S}) = p(A \cap \bar{S}) + p(B \cap \bar{S}) = p(A) \times p_A(\bar{S}) + p(B) \times p_B(\bar{S}) = 0,8 \times (1 - 0,1) + 0,2 \times (1 - 0,2) = 0,88.$$

$$p(\bar{S}) = 0,88.$$

3) La probabilité demandée est $p_S(B)$. D'après les deux questions précédentes $P(S) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - 0,88 = 0,12$ et $P(B \cap S) = P(B) - P(B \cap \bar{S}) = 0,2 - 0,16 = 0,04$. Donc

$$p_S(B) = \frac{p(B \cap S)}{p(S)} = \frac{0,04}{0,12} = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ arrondi au centième.}$$

$$p_S(B) = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ arrondi au centième.}$$

Partie B

1) X suit une loi binomiale. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la boîte est sans trace de pesticide » avec une probabilité $p = P(\bar{S}) = 0,88$ d'après la question 2)b) de la partie A et « la boîte a des traces de pesticide » avec une probabilité $1 - p = 0,12$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

2) La probabilité demandée est $P(X = 10)$.

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times 0,12^0 = 0,88^{10} = 0,28 \text{ arrondi au centième.}$$

3) La probabilité demandée est $P(X \geq 8)$. La calculatrice fournit

$$P(X \geq 8) = 0,89 \text{ arrondi au centième.}$$

Partie C

1) L'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95% est

$$\left[0,88 - 1,96 \frac{\sqrt{0,88 \times (1 - 0,88)}}{\sqrt{50}}, 0,88 + 1,96 \frac{\sqrt{0,88 \times (1 - 0,88)}}{\sqrt{50}} \right] = [0,78; 0,98],$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

2) On note tout d'abord que $n \geq 30$ puis que $np = 50 \times 0,88 = 44$ et $n(1 - p) = 50 \times 0,12 = 6$ et donc que $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$.

La fréquence de boîtes sans trace de pesticides est $f = \frac{50 - 12}{50} = \frac{76}{100} = 0,76$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation déterminé en 1). Donc, l'inspecteur de la brigade de répression peut décider, au seuil de 95%, que la publicité est mensongère.