Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Soient n un entier naturel non nul, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAE. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.
On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1) On interroge un étudiant au hasard. On note :

A l'événement « l'étudiant répond A »,
B l'événement « l'étudiant répond B »,
C l'événement « l'étudiant répond C »,
R l'événement « l'étudiant connaît la réponse »,
$\overline{R}$ l'événement contraire de R.

a) Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

b) Montrer que la probabilité de l'événement A est $P(A) = \dfrac{1}{3}(1 + 2r)$.

c) Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisi A connaisse la bonne réponse.

2) Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a) Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r.

b) Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
Donner un intervalle de confiance au seuil de 95% de l'estimation de p.
En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95% de r.

c) Dans la suite, on suppose que $r = 0,4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.

i) Donner les paramètres de cette loi normale.
ii) Donner une valeur approchée de $P(X \leqslant 250)$ à 10^{-2} près.
On pourra s'aider de la table en annexe 1, qui donne une valeur approchée de $P(X \leqslant t)$ où X est la variable aléatoire de la question 2)c).

Annexe

À rendre avec la copie

E12				=LOI.NORMALE($A12+E$1 ;240 ;RACINE(96) ;VRAI)						
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,330	0,334	0,338
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,360	0,364	0,368	0,372	0,376
4	237	0,380	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407	0,411	0,415
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447	0,451	0,455
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,480	0,484	0,488	0,492	0,496
7	240	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,533	0,537
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616
10	243	0,620	0,624	0,628	0,632	0,636	0,640	0,643	0,647	0,651	0,655
11	244	0,658	0,662	0,666	0,670	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691
12	245	0,695	0,699	0,702	**0,706**	0,709	0,713	0,716	0,720	0,723	0,726
13	246	0,730	0,733	0,737	0,740	0,743	0,746	0,750	0,753	0,756	0,759
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,810	0,813	0,815	0,818
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,860	0,863	0,865	0,867
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,880	0,882	0,884	0,886	0,888
19	252	0,890	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,904	0,906
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919	0,921	0,922
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933	0,935	0,936
22	255	0,937	0,938	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945	0,947	0,948
23	256	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958
24	257	0,959	0,960	0,960	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965	0,965	0,966
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978	0,979
27	260	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984

Extrait d'une feuille de calcul

Exemple d'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre $0,706$ correspond à $P(X \leqslant 245,3)$.

Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

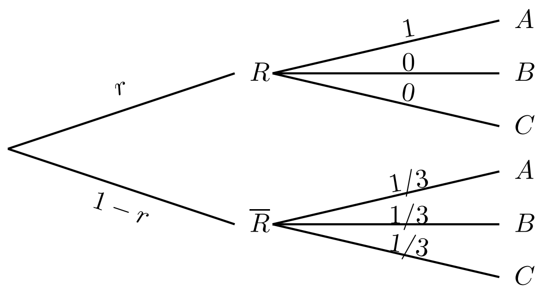
Partie A

$$\begin{aligned} f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] &\Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \text{ et } f \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p \leqslant f + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \Leftrightarrow f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant f + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, les événements $f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et $p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ se produisent simultanément. Ils ont donc la même probabilité et en particulier, pour n grand, l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

Partie B

1) a) Représentons le situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(R \cap A\right) + P\left(\overline{R} \cap A\right) = P(R) \times P_R(A) + P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(A) \\ &= r \times 1 + (1-r) \times \frac{1}{3} = \frac{3r + 1 - r}{3} = \frac{1}{3}(1+2r). \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{3}(1+2r).}$$

c) La probabilité demandée est $P_A(R)$.

$$P_A(R) = \frac{P\left(A \cap R\right)}{p(A)} = \frac{P(R) \times P_R\left(A\right)}{p(A)} = \frac{r \times 1}{\frac{1}{3}(1+2r)} = \frac{3r}{1+2r}.$$

$$\boxed{P_A(R) = \frac{3r}{1+2r}.}$$

2) a) X suit une loi binomiale. En effet,

- 400 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « l'étudiant donne la bonne réponse » avec une probabilité $p = P(A) = \frac{1}{3}(1+2r)$ d'après la question 1)b) et « l'étudiant ne donne pas la bonne réponse » avec une probabilité $1 - p = 1 - \frac{1}{3}(1+2r) = \frac{2}{3}(1-r)$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \frac{1}{3}(1+2r)$.

On sait alors que pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant 400$,

$$P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{3}(1 + 2r)\right)^k \left(\frac{2}{3}(1 - r)\right)^{400-k}.$$

b) Dans cette question, $n = 400$ et $f = \dfrac{240}{400} = 0,6$. On note que $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1 - f) \geqslant 5$.
Un intervalle de confiance au seuil de 95% de l'estimation de p est

$$\left[0,6 - \frac{1}{\sqrt{400}}; 0,6 - \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,55; 0,65].$$

Ainsi, on a au moins 95% de chances que $0,55 \leqslant p \leqslant 0,65$. Or,

$$\begin{aligned} 0,55 \leqslant p \leqslant 0,65 &\Leftrightarrow 0,55 \leqslant \frac{1}{3}(1 + 2r) \leqslant 0,65 \Leftrightarrow 1,65 \leqslant 1 + 2r \leqslant 1,95 \Leftrightarrow 0,65 \leqslant 2r \leqslant 0,95 \\ &\Leftrightarrow 0,325 \leqslant r \leqslant 0,475. \end{aligned}$$

Un intervalle de confiance de r au seuil de 95% est $[0,325; 0,475]$.

c) i) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \dfrac{1}{3}(1 + 2 \times 0,4) = 0,6$. L'espérance de X est

$$E(X) = np = 400 \times 0,6 = 240$$

et la variance de X est

$$V(X) = np(1 - p) = 400 \times 0,6 \times 0,4 = 96.$$

L'énoncé nous dit alors que l'on approche la loi de X par la loi normale de paramètres $\mu = 240$ et $\sigma^2 = 96$ ou encore $\sigma = \sqrt{96} = 9,7$ à 10^{-1} près.

ii) On lit dans la case B17 du tableau fourni en annexe $P(X \leqslant 250) = 0,846$ et en particulier $P(X \leqslant 250) = 0,84$ à 10^{-2} près.

