Amérique du sud. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (commun à tous les candidats)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :

M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »
C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1) a) Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$.

b) Calculer $P(C)$.

2) On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.

On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1) Définir la loi de la variable aléatoire X.

2) Déterminer $P(X = 35)$.

3) Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Partie C

1) On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \dfrac{X}{400}$, X étant la variable aléatoire de la **partie B**.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

2) Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

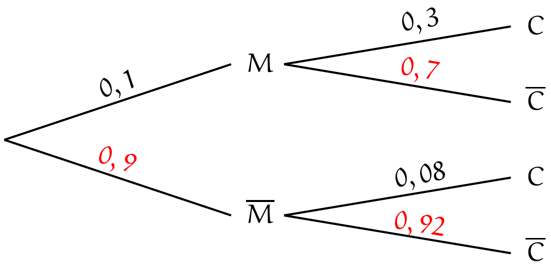
Qu'en pensez-vous ?

Amérique du sud. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



$$P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03.$$

b) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(M \cap C) + P\left(\overline{M} \cap C\right) = P(M) \times P_M(C) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(C) \\ &= 0,1 \times 0,3 + (1 - 0,1) \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(C) = 0,102.}$$

2) La probabilité demandée est $P_C(M)$.

$$P_C(M) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,03}{0,102} = \frac{30}{102} = \frac{15}{51} = 0,2941 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$\boxed{P_C(M) = 0,2941 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

Partie B

1) La taille de l'échantillon est suffisament petite par rapport à celle de la population pour que l'on puisse considérer les choix des quatre cents personnes de l'échantillon comme indépendants les uns des autres.

X suit une loi binomiale. En effet,

- 400 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la personne choisie présente une malformation cardiaque de type anévrisme » avec une probabilité $p = 0,1$ et « la personne choisie ne présente pas une malformation cardiaque de type anévrisme » avec une probabilité $1 - p = 0,9$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,1$.

2) La calculatrice fournit $P(X = 35) = 0,0491$ arrondi à 10^{-4}.

3) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 30)$. La calculatrice fournit

$$P(X \geqslant 30) = 1 - p(X \leqslant 29) = 0,9643 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

Partie C

1) Ici, $n = 400$ et $p = 0,1$. On note que $n \geqslant 30$ puis que $np = 40$ et donc $np \geqslant 5$ et que $n(1-p) = 360$ et donc que $n(1-p) \geqslant 5$. L'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95% est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,1 - 1,96\frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{400}}; 0,1 + 1,96\frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{400}}\right] = [0,0706; 0,1294].$$

2) La fréquence observée est $f = \dfrac{60}{400} = 0,25$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. On peut en conclure que cet échantillon n'est pas représentatif de la population au risque de se tromper de 5 %.

