Rochambeau 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

F l'événement « le membre choisi est une femme »,

T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1) Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\dfrac{2}{5}$.

2) On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1) Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard et de manière indépendante pour tenir la loterie.

a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

b) Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.

c) Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.

2) Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard successivement avec remise deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie à cette loterie.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

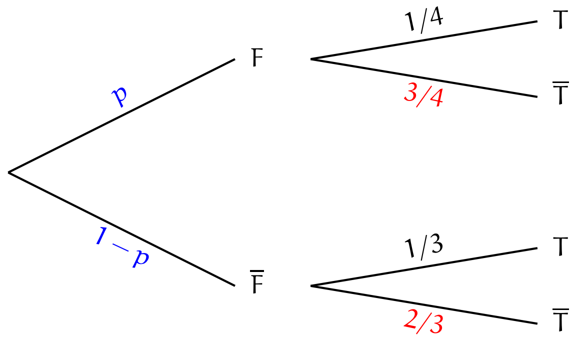
b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Rochambeau 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) L'énoncé fournit $p_F(T) = \frac{1}{4}$, $p_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{3}$ et $p(T) = \frac{3}{10}$ et demande $p(F)$. Posons $p = p(F)$. Représentons la situation par un arbre :



La formule des probabilités totales fournit :

$$p(T) = p\left(F \cap T\right) + p\left(\overline{F} \cap T\right) = p(F) \times p_F(T) + p\left(\overline{F}\right) \times p_{\overline{F}}(T),$$

et donc $\frac{1}{4}p + \frac{1}{3}(1-p) = \frac{3}{10}$ puis $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)p = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}$ puis $\frac{p}{12} = \frac{1}{30}$ et finalement

$$p(F) = \frac{12}{30} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{p(F) = \frac{2}{5}.}$$

2) La probabilité demandée est $p_T(F)$.

$$p_T(F) = \frac{p(F \cap T)}{p(T)} = \frac{p(F) \times p_F(T)}{p(T)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{p_T(F) = \frac{1}{3}.}$$

Partie B

1) a) Notons Y le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le membre choisi adhère à la section tennis » avec une probabilité $p = \frac{3}{10}$ ou « le membre choisi n'adhère pas à la section tennis » avec une probabilité $1 - p = \frac{7}{10}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{3}{10}$.

La probabilité demandée est $p(Y = 2)$. La calculatrice fournit

$$p(Y = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^2 = 0,2646.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remplace 4 par n et on obtient pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$p(Y = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{10}\right)^k\left(\frac{7}{10}\right)^{n-k}.$$

Par suite,

$$p_n = p\left(Y \geqslant 1\right) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{3}{10}\right)^0\left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{7}\right)^n \geqslant 100\\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{10}{7}\right) \geqslant \ln(100) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{10}{7}\right)} \text{ (car } \ln(10/7) > 0)\\
&\Leftrightarrow n \geqslant 12,9\ldots\\
&\Leftrightarrow n \geqslant 13 \text{ (car } n \text{ est un entier)}.
\end{aligned}$$

Le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$ est 13.

2) La variable aléatoire X prend trois valeurs : $35 = 40 - 5$ quand le joueur tire deux jetons gagnants, $15 = 20 - 5$ quand le joueur tire un jeton gagnant et -5 quand le joueur ne tire aucun jeton gagnant.

• La probabilité de tirer deux jetons gagnants est $\left(\frac{10}{100}\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$.

• La probabilité de ne tirer aucun jeton gagnant est $\left(\frac{90}{100}\right)^2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}$.

• La probabilité de tirer un jeton gagnant est $1 - \frac{1}{100} - \frac{81}{100} = \frac{18}{100}$.

Donnons la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i	35	15	-5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{81}{100}$

b) L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = 35 \times \frac{1}{100} + 15 \times \frac{18}{100} - 5 \times \frac{81}{100} = \frac{35 + 270 - 405}{100} = -1.$$

Le gain algébrique moyen à cette loterie est -1 € ou encore en moyenne, le joueur perd 1 euro par partie jouée. Le gain algébrique est strictement négatif et donc le jeu est défavorable au joueur ou encore le jeu est favorable aux membres de l'association qui organisent la loterie.

