

Pondichéry 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) a) L'algorithme démarre avec 5 nombres égaux à 0 puis, tant que les 5 nombres ne sont pas deux à deux distincts, il génère 5 nombres au hasard entre 1 et 50. L'algorithme s'arrête quand les 5 nombres générés sont deux à deux distincts. Par suite, l'algorithme peut fournir les ensembles L_2 et L_4 mais pas les ensembles L_1 et L_3 .

b) L'algorithme permet de tirer au sort 5 coureurs parmi les 50 pour subir un contrôle anti-dopage.

2) Il y a 50 coureurs. La probabilité qu'un coureur subisse un contrôle est donc

$$p = \frac{5}{50} = 0,1.$$

3) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le coureur subit un contrôle » avec une probabilité $p = 0,1$ ou « le coureur ne subit pas de contrôle » avec une probabilité $1 - p = 0,9$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k} (0,1)^k (0,9)^{10-k}.$$

b) La calculatrice fournit

- $p(X = 5) = \binom{10}{5} (0,1)^5 (0,9)^5 = 0,0015$ arrondie au dix millièmes.

La probabilité que le coureur soit contrôlé 5 fois exactement est 0,0015 arrondie au dix millièmes.

- $p(X = 0) = \binom{10}{0} (0,1)^0 (0,9)^{10} = (0,9)^{10} = 0,3487$ arrondie au dix millièmes.

La probabilité que le coureur ne soit pas contrôlé est 0,3487 arrondie au dix millièmes.

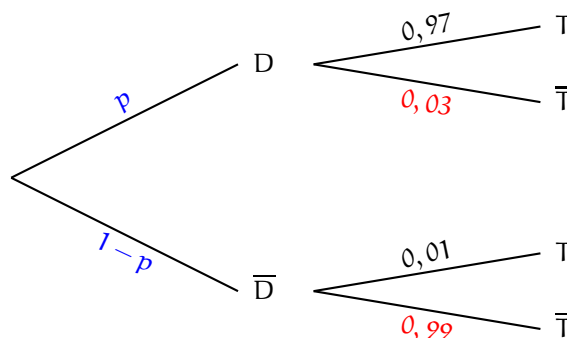
- $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (0,9)^{10} = 0,6513$ arrondie au dix millièmes.

La probabilité que le coureur soit contrôlé au moins une fois est 0,6513 arrondie au dix millièmes.

Partie B

1) L'énoncé fournit $p(T) = 0,05$, $p_{\overline{D}}(T) = 0,97$ et $p_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0,01$ et demande $p(D)$. Posons $p(D) = p$.

Représentons la situation par un arbre :



La formule des probabilités totales fournit :

$$p(T) = p(D \cap T) + p(\overline{D} \cap T) = p(D) \times p_D(T) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(T),$$

et donc $0,97p + 0,01(1 - p) = 0,05$ puis $0,96p = 0,04$ et finalement

$$p(D) = \frac{0,04}{0,96} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}.$$

$$p(D) = \frac{1}{24}.$$

2) La probabilité demandée est $p_T(\bar{D})$.

$$p_T(\bar{D}) = \frac{p(T \cap \bar{D})}{p(T)} = \frac{p(\bar{D}) \times p_{\bar{D}}(T)}{p(T)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{24}\right) \times \frac{1}{100}}{\frac{5}{100}} = \frac{23}{24} \times \frac{1}{100} \times \frac{100}{5} = \frac{23}{120}.$$

$$p_T(\bar{D}) = \frac{23}{120}.$$