Nouvelle Calédonie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.

Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.

On considère les événements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1) a) Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

b) Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{3}{8}$.

c) Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

2) On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a) Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

b) Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

c) On donne le tableau suivant :

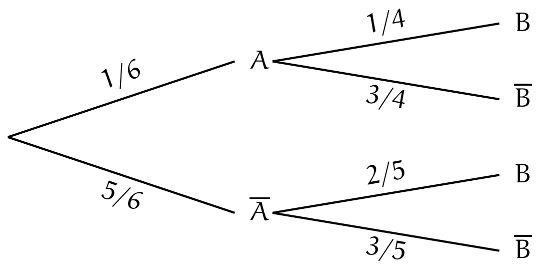
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X < k)$	$0,009\,1$	$0,063\,7$	$0,211\,0$	$0,446\,7$	$0,694\,3$	$0,872\,5$	$0,961\,6$	$0,992\,2$	$0,999\,0$	$0,999\,9$

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'événement : « la personne gagne au moins N parties ».
À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet événement est-elle inférieure à $\dfrac{1}{10}$?

Nouvelle Calédonie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) Représentons la situation par un arbre.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

$$\boxed{p(B) = \frac{3}{8}.}$$

c) La probabilité demandée est $p_B(A)$.

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \times p_A(B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{24} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{9}.$$

$$\boxed{p_B(A) = \frac{1}{9}.}$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule obtenue est noire » avec une probabilité $p = \frac{3}{8}$ (d'après la question 1)b)) ou « la boule obtenue n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{8}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{10-k}.$$

En particulier,

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left(\frac{5}{8}\right)^7 = 0,2357\ldots$$

(fourni par la calculatrice) et donc

$$\boxed{\text{la probabilité de gagner exactement 3 parties est } 0,236 \text{ arrondie au millième.}}$$

b) La probabilité demandée est $p\,(X \geqslant 1)$.

$$p\,(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \left(\frac{3}{8}\right)^0 \left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 0,9909\ldots$$

et donc

$$\boxed{\text{la probabilité de gagner au moins 1 partie est } 0,991 \text{ arrondie au millième.}}$$

c) La probabilité considérée est $p\,(X \geqslant N)$.

$$p\,(X \geqslant N) \leqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow 1 - p(X < N) \leqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow p(X < N) \geqslant 0,9.$$

D'après le tableau fourni dans l'énoncé, la valeur de N à partir de laquelle la probabilité de l'événement « la personne gagne au moins N parties » devient inférieure à $\frac{1}{10}$ est 7.

