

# Antilles Guyane 2012. Enseignement spécifique

## EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Les cinq questions sont indépendantes.

- 1) Dans un lycée donné, on sait que 55% des élèves sont des filles. On sait également que 35% des filles et 30% des garçons déjeunent à la cantine.  
On choisit au hasard un élève du lycée.  
Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?
- 2) Une urne contient dix jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons successivement et avec remise.  
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un jeton portant un numéro pair ?
- 3) Une variable aléatoire  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres 20 et  $\frac{1}{5}$ .  
Calculer la probabilité que  $Y$  soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à  $10^{-3}$ .
- 4) Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.  
On appelle  $A$  l'événement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et  $F$  l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».  
On suppose que les événements  $A$  et  $F$  sont indépendants.  
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.  
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut  $F$  ?
- 5) On considère l'algorithme :

```
A et C sont des entiers naturels,  
C prend la valeur 0  
Répéter 9 fois  
    A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.  
    Si A > 5 alors C prend la valeur C + 1  
    Fin Si  
Fin répéter  
Afficher C.
```

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur  $C$  affichée.

Quelle loi suit la variable  $X$ ? Préciser ses paramètres.

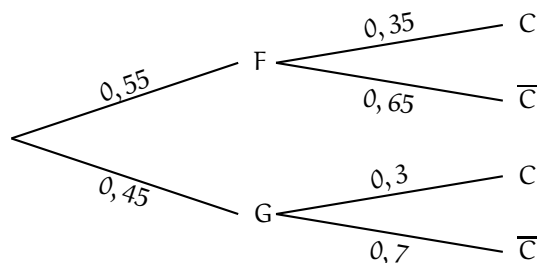
# Antilles Guyane 2012. Enseignement spécifique

## EXERCICE 4 : corrigé

1) On note  $F$  l'événement « l'élève choisi est une fille » et  $G$  l'événement « l'élève choisi est un garçon » (de sorte que  $G = \bar{F}$ ). Enfin, on note  $C$  l'événement « l'élève déjeune à la cantine ».

L'énoncé donne  $p(F) = 0,55$  et donc  $p(G) = 1 - 0,55 = 0,45$  puis  $p_F(C) = 0,35$  et donc  $p_F(\bar{C}) = 1 - 0,35 = 0,65$  puis  $p_G(C) = 0,3$  et donc  $p_G(\bar{C}) = 1 - 0,3 = 0,7$ .

Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est  $p(\bar{C})$ . D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(\bar{C}) &= p(F \cap \bar{C}) + p(G \cap \bar{C}) = p(F) \times p_F(\bar{C}) + p(G) \times p_G(\bar{C}) \\ &= 0,55 \times 0,65 + 0,45 \times 0,7 = 0,6725 \end{aligned}$$

La probabilité que l'élève ne déjeune pas à la cantine est 0,6725.

2) Notons  $X$  la variable aléatoire égale aux nombres de jetons portant un numéro pair obtenus au cours d'un tirage de trois jetons successivement et avec remise.

La variable aléatoire  $X$  suit un schéma de BERNOULLI. En effet :

- 3 expériences identiques et indépendantes sont effectuées (tirer trois fois un jeton parmi dix) ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « tirer un jeton portant un numéro pair » avec une probabilité  $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$  et « tirer un jeton ne portant pas un numéro pair » avec une probabilité  $1 - p = \frac{1}{2}$ .

La variable aléatoire  $X$  est donc régie par une loi binomiale de paramètres  $n = 3$  et  $p = \frac{1}{2}$ .

La probabilité demandée est  $p(X \geq 1)$ . Or

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

La probabilité demandée est  $\frac{7}{8}$ .

3) On sait que pour tout entier naturel  $k$  tel que  $0 \leq k \leq 20$ ,

$$p(Y = k) = \binom{20}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{20-k},$$

et donc

$$p(Y \geq 2) = 1 - p(Y = 0) - p(Y = 1) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{20} - 20 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{19} = 0,930 \dots$$

$p(Y \geq 2) = 0,930$  à  $10^{-3}$  près par défaut.

4) Posons plus simplement  $p(F) = p$ .

L'énoncé donne  $p(A) = 0,02$  et  $p(A \cup F) = 0,069$ . D'autre part, puisque les événements  $A$  et  $F$  sont indépendants,  $p(A \cap F) = p(A) \times p(F) = 0,02p$ .

$$0,069 = p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F) = 0,02 + p - 0,02p = 0,02 + 0,98p,$$

et donc

$$p = \frac{0,069 - 0,02}{0,98} = \frac{0,049}{0,98} = \frac{49}{980} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

$$p(F) = 0,05.$$

5) Dans cet algorithme, on recommence  $n = 9$  fois une même expérience : choisir un nombre au hasard entre 1 et 7. A chaque expérience, on a deux éventualités : « le nombre obtenu est 6 ou 7 (le succès) » avec une probabilité  $p = \frac{2}{7}$  ou « ne pas obtenir 6 ou 7 (l'échec) » avec une probabilité  $1 - p = \frac{5}{7}$ . De plus, au cours des 9 expériences, la probabilité d'obtenir 6 ou 7 ne varie pas en fonction des résultats précédemment obtenus ou encore les 9 expériences sont indépendantes les unes des autres.

La variable C est un compteur : à la fin des neuf expériences, la variable C contient le nombre de fois où on a obtenu un résultat égal à 6 ou 7 ou encore la variable X donne le nombre de succès en 9 tentatives. Finalement,

X suit une loi binomiale de paramètre  $n = 9$  et  $p = \frac{2}{7}$ .