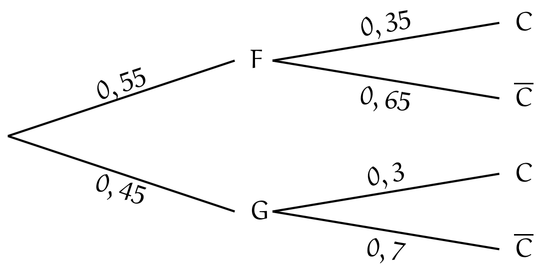
Antilles Guyane 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) On note F l'événement « l'élève choisi est une fille » et G l'événement « l'élève choisi est un garçon » (de sorte que $G = \overline{F}$). Enfin, on note C l'événement « l'élève déjeune à la cantine ».

L'énoncé donne $p(F) = 0,55$ et donc $p(G) = 1 - 0,55 = 0,45$ puis $p_F(C) = 0,35$ et donc $p_F\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,35 = 0,65$ puis $p_G(C) = 0,3$ et donc $p_G\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est $p\left(\overline{C}\right)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}p\left(\overline{C}\right) &= p\left(F \cap \overline{C}\right) + p\left(G \cap \overline{C}\right) = p(F) \times p_F\left(\overline{C}\right) + p(G) \times p_G\left(\overline{C}\right)\\ &= 0,55 \times 0,65 + 0,45 \times 0,7 = 0,6725\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité que l'élève ne déjeune pas à la cantine est } 0,6725.}$

2) Notons X la variable aléatoire égale aux nombres de jetons portant un numéro pair obtenus au cours d'un tirage de trois jetons successivement et avec remise.

La variable aléatoire X suit un schéma de Bernoulli. En effet :

- 3 expériences identiques et indépendantes sont effectuées (tirer trois fois un jeton parmi dix) ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « tirer un jeton portant un numéro pair » avec une probabilité $p = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ et « tirer un jeton ne portant pas un numéro pair » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{1}{2}$.

La variable aléatoire X est donc régie par une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{2}$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$. Or

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

$\boxed{\text{La probabilité demandée est } \dfrac{7}{8}.}$

3) On sait que pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant 20$,

$$p(Y = k) = \binom{20}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{20-k},$$

et donc

$$p(Y \geqslant 2) = 1 - p(Y = 0) - p(Y = 1) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{20} - 20 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{19} = 0,930\ldots$$

$\boxed{p(Y \geqslant 2) = 0,930 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}}$

4) Posons plus simplement $p(F) = p$.

L'énoncé donne $p(A) = 0,02$ et $p(A \cup F) = 0,069$. D'autre part, puisque les événements A et F sont indépendants, $p(A \cap F) = p(A) \times p(F) = 0,02p$.

$$0,069 = p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F) = 0,02 + p - 0,02p = 0,02 + 0,98p,$$

et donc

$$p = \frac{0,069 - 0,02}{0,98} = \frac{0,049}{0,98} = \frac{49}{980} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

$$\boxed{p(F) = 0,05.}$$

5) Dans cet algorithme, on recommence $n = 9$ fois une même expérience : choisir un nombre au hasard entre 1 et 7. A chaque expérience, on a deux éventualités : « le nombre obtenu est 6 ou 7 (le succès) » avec une probabilité $p = \frac{2}{7}$ ou « ne pas obtenir 6 ou 7 (l'échec) » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{7}$. De plus, au cours des 9 expériences, la probabilité d'obtenir 6 ou 7 ne varie pas en fonction des résultats précédemment obtenus ou encore les 9 expériences sont indépendantes les unes des autres.

La variable C est un compteur : à la fin des neuf expériences, la variable C contient le nombre de fois où on a obtenu un résultat égal à 6 ou 7 ou encore la variable X donne le nombre de succès en 9 tentatives. Finalement,

$$\boxed{\text{X suit une loi binomiale de paramètre } n = 9 \text{ et } p = \frac{2}{7}.}$$

