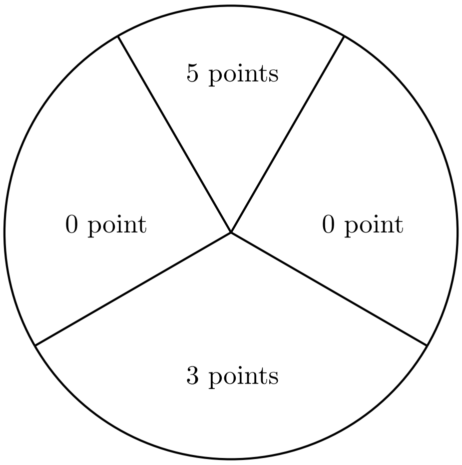
Pondichéry 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1) Le joueur lance une fléchette.

On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$, déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2) Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

On note G_2 l'événement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
On note G_3 l'événement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
On note P l'événement : « le joueur perd la partie ».
On note $p(A)$ la probabilité d'un événement A.

a) Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.

On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$.

b) En déduire $p(P)$.

3) Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4) Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.
Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €.
S'il perd, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie.
Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.

a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Pondichéry 2011. Enseignement spécifique

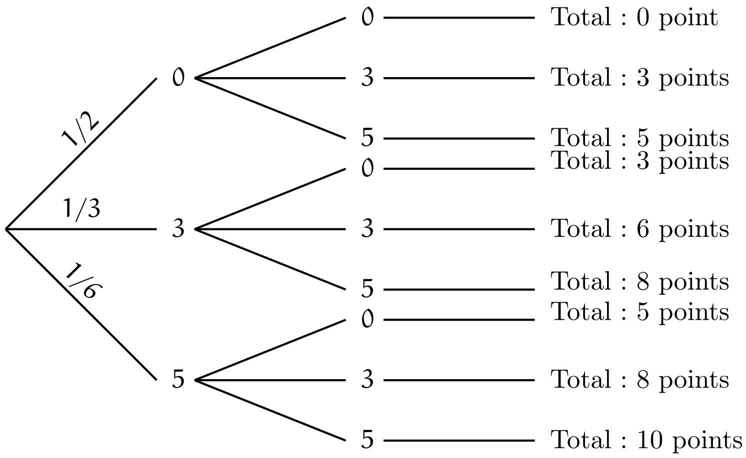
EXERCICE 3 : corrigé

1) On a $p_5 = \dfrac{1}{3}p_0$ puis $p_3 = 2p_5 = \dfrac{2}{3}p_0$.

L'égalité $p_0 + p_3 + p_5 = 1$ fournit alors $\left(1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\right) p_0 = 1$ puis $p_0 = \dfrac{1}{2}$, $p_3 = \dfrac{1}{3}$ et $p_5 = \dfrac{1}{6}$.

$$\boxed{p_0 = \frac{1}{2},\ p_3 = \frac{1}{3} \text{ et } p_5 = \frac{1}{6}.}$$

2) a) Représentons la situation par un arbre.



Les événements amenant au gain de la partie en deux lancers sont (3 points, 5 points), (5points, 3 points) et (5 points, 5 points). Leurs probabilités respectives sont $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18}$ et $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{18}$ et $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$. Donc

$$p(G_2) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

$$\boxed{p(G_2) = \frac{5}{36}.}$$

b) D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que le joueur gagne la partie est

$$p(G) = p(G_2) + p(G_3) = \frac{5}{36} + \frac{7}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

et donc $p(P) = 1 - p(G) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{p(P) = \frac{2}{3}.}$$

3) Notons Y le nombre de fois que l'événement P est réalisé. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 6 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'événement P est réalisé » avec une probabilité $p = \dfrac{2}{3}$ ou « l'événement $\overline{P}$ est réalisé » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{1}{3}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $p(Y \leqslant 5)$. Or

$$p(Y \leqslant 5) = 1 - p(Y = 6) = 1 - \binom{6}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{665}{729}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est } \frac{665}{729} \text{ ou encore } 0,91 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

4) a) Loi de probabilité de X.

D'après les questions précédentes, $p(X = -2) = p(P) = \frac{2}{3}$ puis $p(X = 1) = p(G_3) = \frac{7}{36}$ et $p(X = 3) = p(G_2) = \frac{5}{36}$.
Résumons ces résultats dans un tableau.

Valeurs prises par X : x_i	-2	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$

b) L'espérance de X est $E(X) = \frac{2}{3} \times (-2) + \frac{7}{36} \times 1 + \frac{5}{36} \times 3 = -\frac{4}{3} + \frac{22}{36} = -\frac{24}{18} + \frac{11}{18} = -\frac{13}{18}$.

$$\boxed{E(X) = -\frac{13}{18}.}$$

Puisque $E(X) < 0$, le jeu est défavorable au joueur.

