

Pondichéry 2011. Enseignement spécifique

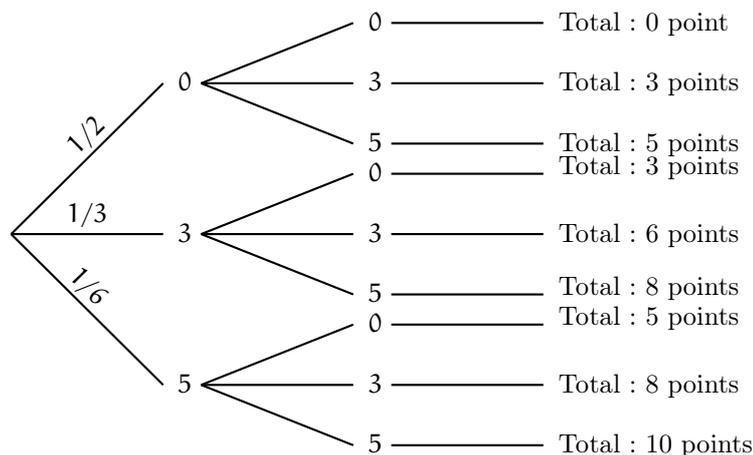
EXERCICE 3 : corrigé

1) On a $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ puis $p_3 = 2p_5 = \frac{2}{3}p_0$.

L'égalité $p_0 + p_3 + p_5 = 1$ fournit alors $\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)p_0 = 1$ puis $p_0 = \frac{1}{2}$, $p_3 = \frac{1}{3}$ et $p_5 = \frac{1}{6}$.

$$p_0 = \frac{1}{2}, p_3 = \frac{1}{3} \text{ et } p_5 = \frac{1}{6}.$$

2) a) Représentons la situation par un arbre.



Les événements amenant au gain de la partie en deux lancers sont (3 points, 5 points), (5 points, 3 points) et (5 points, 5 points).
Leurs probabilités respectives sont $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ et $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ et $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Donc

$$p(G_2) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

$$p(G_2) = \frac{5}{36}.$$

b) D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que le joueur gagne la partie est

$$p(G) = p(G_2) + p(G_3) = \frac{5}{36} + \frac{7}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

et donc $p(P) = 1 - p(G) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$$p(P) = \frac{2}{3}.$$

3) Notons Y le nombre de fois que l'événement P est réalisé. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 6 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'événement P est réalisé » avec une probabilité $p = \frac{2}{3}$ ou « l'événement \bar{P} est réalisé » avec une probabilité $1 - p = \frac{1}{3}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{2}{3}$.

La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $p(Y \leq 5)$. Or

$$p(Y \leq 5) = 1 - p(Y = 6) = 1 - \binom{6}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{665}{729}.$$

La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $\frac{665}{729}$ ou encore 0,91 à 10^{-2} près.

4) a) **Loi de probabilité de X.**

D'après les questions précédentes, $p(X = -2) = p(P) = \frac{2}{3}$ puis $p(X = 1) = p(G_3) = \frac{7}{36}$ et $p(X = 3) = p(G_2) = \frac{5}{36}$.
Résumons ces résultats dans un tableau.

Valeurs prises par X : x_i	-2	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$

b) L'espérance de X est $E(X) = \frac{2}{3} \times (-2) + \frac{7}{36} \times 1 + \frac{5}{36} \times 3 = -\frac{4}{3} + \frac{22}{36} = -\frac{24}{18} + \frac{11}{18} = -\frac{13}{18}$.

$$E(X) = -\frac{13}{18}.$$

Puisque $E(X) < 0$, le jeu est défavorable au joueur.