Polynésie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'événement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'événement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1) Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2) Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3) Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

4) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.

5) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

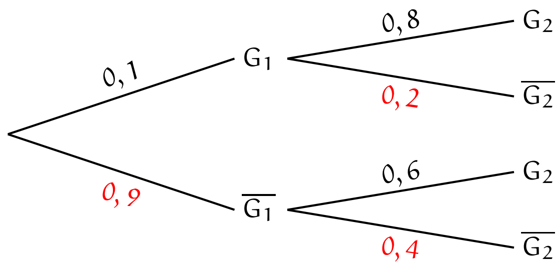
6) Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

7) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

Polynésie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales,

$$p_2 = p(G_2) = p(G_1 \cap G_2) + p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p\left(\overline{G_1}\right) \times p_{\overline{G_1}}(G_2)$$
$$= 0,1 \times 0,8 + (1 - 0,1) \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62.$$

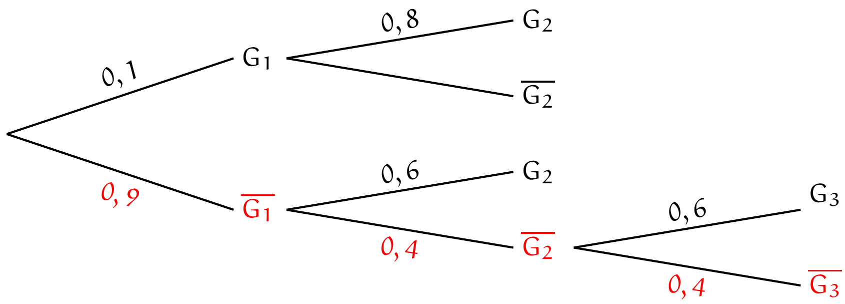
$$\boxed{p(G_2) = 0,62.}$$

2) La probabilité demandée est $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right)$. Or

$$p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right) = \frac{p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right)}{p(G_2)} = \frac{p\left(\overline{G_1}\right) \times p_{\overline{G_1}}(G_2)}{p(G_2)} = \frac{(1 - 0,1) \times 0,6}{0,62} = \frac{0,54}{0,62} = \frac{54}{62} = \frac{27}{31}.$$

$$\boxed{p_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{27}{31}.}$$

3) On rajoute des branches à l'arbre du 1) :



L'événement « le joueur gagne au moins une des trois premières parties » est l'événement contraire de l'événement « le joueur ne gagne aucune des trois premières parties ». La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois premières parties est

$$p\left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}\right) = 0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$$

et donc la probabilité que le joueur gagne au moins une des trois premières parties est $1 - 0,144 = 0,856$.

$$\boxed{\text{La probabilité que le joueur gagne au moins une des trois premières parties est } 0,856.}$$

4) D'après la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p\left(G_n \cap G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) = p\left(G_n\right) \times p_{G_n}\left(G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n}\right) \times p_{\overline{G_n}}\left(G_{n+1}\right)$$
$$= p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = 0,2p_n + 0,6 = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.}$$

5) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

- $\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} = \frac{15}{20} - \frac{13}{20} = \frac{2}{20} = 0,1 = p_1$ et l'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{3}{5} = \frac{3}{20} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{3}{5} = \frac{15}{20} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n.}$$

6) Puisque $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, on sait que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{4}.}$$

7) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} &\Leftrightarrow \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \Leftrightarrow \frac{13}{4} \times \frac{1}{5^n} < \frac{1}{10^7} \Leftrightarrow 5^n > \frac{13 \times 10^7}{4} \\
&\Leftrightarrow \ln(5^n) > \ln\left(3,25 \times 10^7\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(5) > \ln\left(3,25 \times 10^7\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(3,25 \times 10^7\right)}{\ln(5)} \text{ (car } \ln(5) > 0) \\
&\Leftrightarrow n > 10,7\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 11 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Les entiers naturels non nuls n pour lesquels $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ sont les entiers supérieurs ou égaux à 11.

