

Polynésie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'événement « le joueur gagne la n -ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'événement G_n .

On a donc $p_1 = 0,1$.

1) Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2) Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3) Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

4) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.

5) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

6) Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

7) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?